Theoretische Elektrodynamik
für das Lehramt

(Lehramt an Gymnasien und Regionalen Schulen)

Priv.-Doz. Dr. Reinhard Mahnke
Institut für Physik

Lehrveranstaltung Nr. 12562
(Sommersemester 2014: 2 SWS V + 2 SWS Ü)

V: Dienstag 13.15 bis 14.45 Uhr, Dr. Thomas Bornath

Ort: Universitätsplatz 3, Kleiner Hörsaal

Ü: Donnerstag 7.30 bis 9.00 Uhr, Dr. Reinhard Mahnke

Ort: Wismarsche Str. 44, Seminarraum

Die Lehrveranstaltung begann als Einführungsvorlesung am Donnerstag, d. 03.04.2014, 7.30 bis 9.00 Uhr im Seminarraum des Instituts für Physik in der Wismarschen Str. 44.

Die erste Übung fand am Donnerstag, d. 10.04.2014, 7.30 bis 9.00 Uhr im Seminarraum des Instituts für Physik in der Wismarschen Str. 44 statt.

Literaturhinweis:

1. Peter Schmüser: Theoretische Physik für Studierende des Lehramts 2 Elektrodynamik und Spezielle Relativitätstheorie

Übungen zur Theoretischen Elektrodynamik

Zur Rolle der Mathematik in den Naturwissenschaften:
Um ein mögliches Missverständnis auszuräumen, sei zu Beginn betont, dass die im folgenden behandelte Mathematik – sowohl in ihrer Breite als auch in ihrer Tiefe – weit über das hinausgeht, was Sie in Ihrer künftigen Berufspraxis an Ihre Schülerinnen weitergeben können. Es geht darum, die Naturwissenschaften mit ihrer Mathematik so gut zu kennen, dass Sie Ihren Unterricht souverän und mit Verständnis planen und durchführen können.

1. **Zu den Grundlagen von Elektrizität und Magnetismus I**
   (10.04.2014, R. Mahnke)

   • Die elektrische Kraft (Coulomb-Kraft) zwischen einem Proton und einem Elektron ist ca. 39 Zehnerpotenzen größer als die Gravitationskraft. Es gibt positive und negative Ladungen. Gleiche Ladungen stoßen sich ab, ungleiche ziehen sich an (im Unterschied zur Gravitation, die immer anziehend ist).
   Bei neutralen Objekten (Atomen, Molekülen, makroskopischen Körpern) kompensieren sich die anziehenden und die abstoßenden Coulomb-Kräfte mit einer derartigen Perfektion, dass nur die attraktive Gravitationskraft wirksam bleibt.

   • Die elektrische Ladung bzw. der elektrische Strom sind keine mechanischen Größen und erfordern deswegen die Definition einer neuen, elektrischen Einheit. Diese Einheit ist das Ampere [A]. Die elektrische Ladung ist quantisiert, die kleinste mögliche Ladung nennt man Elementarladung $e = 1.602 \cdot 10^{-19}$ C. Jede beobachtete Ladung ist ein ganzzahliges Vielfaches der Elementarladung.

   • **Ladungserhaltung:** In einem abgeschlossenen System bleibt die Gesamtladung erhalten, da die elementaren geladenen Bausteine der Materie, Elektronen und Protonen, erhalten bleiben und weder aus dem Nichts auftauchen noch einfach verschwinden.

   • **Bewegungsgleichung:** Auf ein Teilchen (Masse m, Ladung Q) wirkt in einem elektromagnetischen Feld die Lorentz-Kraft

$$\vec{F} = Q\left(\vec{E} + \vec{v} \times \vec{B}\right) \ . \tag{1}$$

2. **Zu den Grundlagen von Elektrizität und Magnetismus II**
   (17.04.2014, R. Mahnke)

Hausaufgaben (Serie 2) zum 17.04.2014

HA 6 — 6 P

Fassen Sie kurz zusammen: Coulomb-Kraft, Coulomb-Potential, Relation zwischen beiden.
Berechnen Sie die Rotation der Coulomb-Kraft.
Berechnen Sie die Äquipotentialkurven (Isolinien) des Coulomb-Potentials.

HA 7 — 4 P

Wie besagt das Ohmsche Gesetz in seiner (allgemeinen) Formulierung

$$\vec{j} = \sigma \vec{E} \ ? \tag{2}$$

Überführen Sie diesen Ausdruck in eine schulrelevante Form.

HA 8 — 6 P

Integrieren Sie die Bewegungsgleichung $m\,\vec{a} = \vec{F}$ mit Kraft (1) zur Lösung der Aufgabe 5b) aus Serie 1.
Hinweis: Dazu ist ein gekoppeltes Gleichungssystem sinnvoll zu entkoppeln, um eine analytische Lösung zu erhalten.

3. **Grundlagen der Elektostatik I**
   (17.04.2014, H. Weber (ERASMUS, Univ. Luleå) & R. Mahnke)

Hausaufgaben (Serie 3) zum 24.04.2014

HA 9 — 6 P

In der Ebene $z = 0$ befinden sich zwei Punktladungen der Stärke $Q_1 = Q$ und $Q_2 = nQ_1 = nQ$ an den Orten (Quellpunkten) $\vec{r}_1 = (-a, 0)$ und $\vec{r}_2 = (+a, 0)$.
Wenden Sie das Superpositionsprinzip (Überlagerung von zwei Punktladungen) an und berechnen das elektrische Potential für einen beliebigen Aufpunkt $\vec{r} = (x, y)$.
Skizzieren Sie daraus das Äquipotentialkurvenbild sowohl für gleichnamige ($n = +1$) als auch ungleichnamige ($n = -1$) Ladungen.

HA10 — 6 P

Wir betrachten eine homogen geladene Kugel (Radius R). Eine gute Näherung dafür ist ein schwerer Atomkern, z. B. ein Bleikern

bestehend aus 82 Protonen und 126 Neutronen.
Berechnen Sie aus den Grundgleichungen der Elektrostatik das elektrische Feld sowohl im Innen- als auch im Außenraum.
Bestimmen Sie anschliessend das elektrostatische Potential mittels Integration. Normieren Sie das Potential sinnvoll (Erklären Sie die Bedeutung der Normierungskonstanten).

HA11 6 P

Gegeben sind in kartesischen Koordinaten:
Nabla-Operator $\nabla = \vec{e}_x \frac{\partial}{\partial x} + \vec{e}_y \frac{\partial}{\partial y} + \vec{e}_z \frac{\partial}{\partial z}$
Vektorfeld $\vec{G}(x,y,z) = \vec{e}_x G_x(x,y,z) + \vec{e}_y G_y(x,y,z) + \vec{e}_z G_z(x,y,z)$
Skalarfeld $\phi(x,y,z)$

Zu zeigen ist:
11a. $\mathrm{div}(\mathrm{rot}\,\vec{G}) = \nabla \cdot (\nabla \times \vec{G}) = 0$
11b. $\mathrm{rot}(\mathrm{grad}\,\phi) = \nabla \times (\nabla\,\phi) = 0$
11c. Entwicklungssatz des zweifachen Vektorproduktes

„bac − cab"-Regel

$$\vec{a} \times [\vec{b} \times \vec{c}] = \vec{b}(\vec{a} \cdot \vec{c}) - \vec{c}(\vec{a} \cdot \vec{b})$$

4. **Grundlagen der Magnetostatik I**
(Donnerstag, 01.05.2014, ist ein Feiertag, Verschiebung auf 12.06.)

Hausaufgaben (Serie 4) zum 02.05.2014

HA 12 Zeigen Sie für den magnetischen Fluss $\vec{B}$ durch eine Fläche S (Rand C)

$$\iint_S \vec{B} \cdot \mathrm{d}\vec{A} = \oint_C \vec{A} \cdot \mathrm{d}\vec{s}\,.$$

HA 13 Aus dem Biot-Savartschen Gesetz wurde in der Vorlesung das Magnetfeld auf der Symmetrieachse ($x = 0$, $y = 0$) einer stromdurchflossenen kreisförmigen Leiterschleife (Radius R) hergeleitet

$$\vec{B}(0,0,z) = \frac{\mu_0 I}{2} \frac{R^2}{(R^2 + z^2)^{3/2}} \vec{e}_z\,.$$

Das Feld einer Ringspule mit N Windungen ist dann einfach

$$\vec{B}(0,0,z) = \frac{\mu_0 N I}{2} \frac{R^2}{(R^2 + z^2)^{3/2}}\,\vec{e}_z\,.$$

Skizzieren Sie das Feld B_z als Funktion der Koordinate z im Intervall $[-10\text{ cm}, 10\text{ cm}]$ für die Parameter $R = 10$ cm, $N = 200$, $I = 5$ A.

Betrachten Sie nun zwei Ringspulen mit jeweils $R = 10$ cm, $N = 200$ und $I = 3.5$ A bei den Koordinaten $(0, 0, -5\text{ cm})$ und $(0, 0, +5\text{ cm})$. Diese Anordnung wird Helmholtz-Spulenanordnung genannt. Berechnen und zeichnen Sie das Feld auf der z-Achse im Intervall $[-10\text{ cm}, 10\text{ cm}]$. Vergleichen Sie mit der einfachen Spule!

HA 14 Ein gerades Stück eines Leiters werde von einem Strom $I = 2$ A durchflossen. Dieser Leiter verlaufe entlang der z–Achse, beginnend bei $z_A = -0.2$ m, endend bei $z_E = 0.2$ m. Dieser stromdurchflossene Leiter erzeugt ein Magnetfeld.

14a Berechnen Sie mit Hilfe des Gesetzes von Biot-Savart das Magnetfeld für $z = 0$ und variable Werte von x (also entlang der x–Achse) und zwar vektoriell.

14b Berechnen Sie den Wert des Magnetfelds an der Stelle $x = 10$ cm (mit $y = 0$ und $z = 0$).

14c Vergleichen Sie Ihr Ergebnis mit dem Magnetfeld, das ein entlang der z–Achse laufender unendlich langer Leiter mit dem Strom $I = 2$ A am Ort $x = 10$ cm, $y = 0$, $z = 0$ erzeugt.

5. **Grundgleichungen der Elektro-Magnetodynamik I**
(08.05.2014, R. Mahnke)

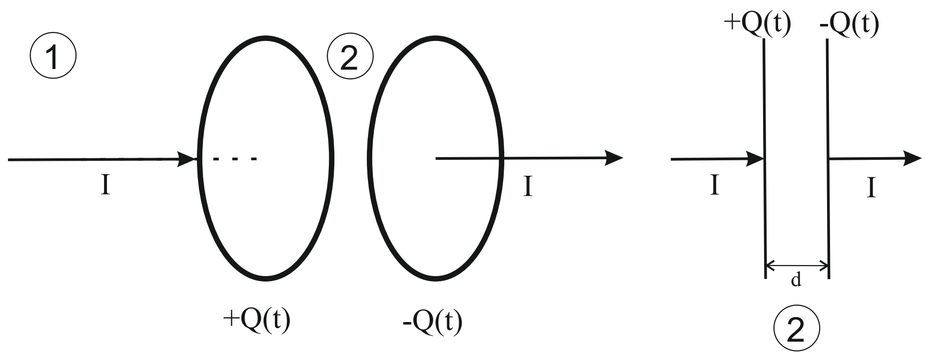
Zusammenfassung der elektromagnetischen Grundgleichungen

- Was ist gesucht?
- Was ist gegeben?
- Wie lauten die Bewegungsgleichungen (lokale Schreibweise)?
- Wie lauten die Bewegungsgleichungen (globale Schreibweise)?
- Weitere wichtige Gleichungen?
- Welche Spezialfälle?

6. **Grundgleichungen der Elektro-Magnetodynamik II**
(08.05.2014, R. Mahnke)

Hausaufgaben (Serie 5) zum 08.05.2014

HA 15 Ein Plattenkondensator in Luft ($\varepsilon_r = 1$) hat kreisförmige Platten mit einem Radius $R_P = 50$ mm im Abstand $d = 1$ mm. Während der Aufladung des Kondensators fließe ein Strom von $I_0 = 10$ A.



Die Anordnung ist zylindersymmetrisch. Es ist also zweckmäßig, im folgenden Zylinderkoordinaten r, ϕ, z zu betrachten mit dem Abstand $r = \sqrt{x^2 + y^2}$ von der Zylinderachse, dem Winkel $\phi = \arctan(y/x)$ sowie der z-Koordinate $z = z$.

15a Im Innern des Kondensators liegt ein homogenes elektrisches Feld $\vec{E} = E\,\vec{e}_z$ vor, das durch die Ladung $Q(t)$ auf den Kondensatorplatten bestimmt wird:

$$|\vec{E}| = \frac{\sigma_{\text{frei}}}{\varepsilon_0} = \frac{Q}{\varepsilon_0 a}.$$

Hier ist σ_{frei} die Flächenladungsdichte der (freien) Ladungen und a die Fläche der Platten. Außerhalb des Kondensators ist die elektrische Feldstärke vernachlässigbar klein.
Berechnen Sie die zeitliche Änderung $\mathrm{d}E/\mathrm{d}t$ der elektrischen Feldstärke im Kondensator.

15b Berechnen Sie die Verschiebungsstromdichte $\vec{J}_V = \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} = \varepsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}$.

15c Zeigen Sie, dass $|\vec{J}_V| \cdot a = I_0$ ist.

HA 16 Berechnen Sie im Gebiet 1 das Magnetfeld B. Im langen geraden Leiter mit Radius $R_L = 1$ mm ist die Stromdichte

$$\vec{J} = \frac{I_0}{\pi R_L^2}\,\vec{e}_z$$

Die Rotation einer Vektorfunktion $\vec{G}$ in Zylinderkoordinaten ist

$$\begin{aligned}\nabla \times \vec{G} &= \left(\frac{1}{r}\frac{\partial G_z}{\partial \phi} - \frac{\partial G_\phi}{\partial z}\right)\vec{e}_r \\ &+ \left(\frac{\partial G_r}{\partial z} - \frac{\partial G_z}{\partial r}\right)\vec{e}_\phi \\ &+ \frac{1}{r}\left(\frac{\partial (rG_\phi)}{\partial r} - \frac{\partial G_r}{\partial \phi}\right)\vec{e}_z\end{aligned}$$

mit den Einheitsvektoren $\vec{e}_r = \cos\phi\,\vec{e}_x + \sin\phi\,\vec{e}_x$, $\vec{e}_\phi = -\sin\phi\,\vec{e}_x + \cos\phi\,\vec{e}_x$ und $\vec{e}_z = \vec{e}_z$.

16a Zeigen Sie, dass aus

$$\nabla \times \vec{B} = \mu_0 \vec{J}$$

folgt, dass im Leiter ($r \leq R_L$) die folgende Differentialgleichung gilt:

$$\frac{1}{r}\frac{\partial (rB_\phi)}{\partial r} = \mu_0 |\vec{J}|\,,$$

und im Außenraum ($r \geq R_L$)

$$\frac{1}{r}\frac{\partial (rB_\phi)}{\partial r} = 0\,.$$

16b Bestimmen Sie $B_\phi(r)$ durch Lösung der beiden Differentialgleichungen. Skizzieren Sie $B_\phi(r)$ als Funktion des Abstandes r. In welche Richtung zeigt $\vec{B} = B_\phi\,\vec{e}_\phi$?

HA 17 Berechnen Sie ebenso das Magnetfeld im Bereich 2 des Plattenkondensator mit Hilfe der 4. Maxwellschen Gleichung. Nun gilt

$$\nabla \times \vec{B} = \mu_0 \varepsilon_0 \frac{\partial E}{\partial t}\,\vec{e}_z$$

Zeigen Sie, dass das Feld im Außenraum ($r > R_P$) mit dem Feld übereinstimmt, dass die Zuleitungsdrähte umgibt.

7. **Grundgleichungen der Elektro-Magnetodynamik III**
   (15.05.2014, R. Mahnke)

Besprechung der Hausaufgaben zum 08.05.2014

Ausgangspunkt ist die Wirbel-Gleichung des magnetischen Feldes

$$\mathrm{rot}\,\vec{B}(\vec{r},t) = \mu\,\vec{j}(\vec{r},t) + \varepsilon\mu\frac{\partial}{\partial t}\vec{E}(\vec{r},t)$$

zur Lösung der Hausaufgaben 15 bis 17.

Ist dies eine Maxwell-Gleichung?

Ergänzen Sie die restlichen Maxwell-Gleichungen.

Wie sehen elektrisches und magnetisches Feld prinzipiell aus?

Wenden Sie alles auf HA 15 bis 17 an und rechnen die beiden zylindersymmetrischen Spezialfälle (gerader Leiter mit $R_L > 0$ bzw. Plattenkondensator $R_P > 0$) vor.

8. **Stationäres und zeitabhängiges elektromagnetisches Feld**
   (22.05.2014, Th. Bornath)

Hausaufgaben (Serie 7) zum 22.05.2014

HA 18 Elektrostatik (nochmals zur Wiederholung)

Aufgabe zur Elektrostatik (radialsymmetrische geladene Kugelschale mit Innen-Radius R_i und Außen-Radius R_a) zur Berechnung des Potentials und des elektrischen Feldes unter Beachtung von Randbedingungen.
Das elektrische Potential folgt aus der Lösung der Poisson–Gleichung für den Innenraum und Außenraum $\Delta V(r) = 0$ und der Laplace–Gleichung für den Zwischenraum $\Delta V(r) = -\rho(r)/\varepsilon$. Das elektrische Feld ergibt sich aus dem Potential mittels (negativer) Abteilung.
Die Ladungsverteilung im Zwischenraum ist gegeben als

$$\rho(r) = \alpha/r^2 \quad \text{für} \quad R_i < r < R_a\ .$$

Hinweis: $\Delta = \nabla\cdot\nabla$ in Kugelkoordinaten benutzen. Integrationskonstanten sind aus Randbedingungen an den Grenzen zu bestimmen, u. a. aus Stetigkeit des Potentials und deren erster Ableitung.

Zusatz-Physik-Verständnis-Frage (Ja/Nein): Kann auch die allgemeine Lösungsformel für das elektrostatische Potential benutzt werden? Liefert dieser Lösungsweg das gleiche Ergebnis?

HA 19 Bilanzgleichungen (das Wichtigste in der Physik)

Es sei Z eine beliebige (extensive) physikalische Zustandsgröße, die in einem Volumen V definiert ist. Ihre Bilanz (globale Formulierung) lautet

$$\frac{d}{dt}Z = -J + P \ ,$$

wobei J der Gesamtstrom (Zu- und Abstrom) über die Oberfläche von V und P die Produktion bzw. Vernichtung von Z innerhalb von V sind.
Beantworten Sie folgende Fragen:
19a) Wie lautet die lokalen Formulierung (inklusive Herleitung)? Hinweis: Stellen Sie dazu den Zusammenhang von $Z(t), J(t), P(t)$ mit den Dichten $z(\vec{r},t), \vec{j}(\vec{r},t), p(\vec{r},t)$ her.
19b) Was zeichnet einen Erhaltungssatz aus (gegenüber der o. g. Bilanz)?
19c) Geben Sie die Ladungserhaltung (global und lokal) an.
19d) Wie lautet die Energiebilanz (global und lokal) bei elektromagnetischen Feldern?

HA 20 Induktionsgesetz (Faraday, 1831)

Eine Spule mit N Windungen wird in einen Elektromagneten gehalten. Das Magnetfeld steigt linear mit der Zeit an ($B(t) = B_0\, t/T$) und erreicht den Wert B_0 nach Zeitdauer T. Die Spule hat einen Querschnit A und ist senkrecht zum Magnetfeld orientiert.
20a) Wie groß ist die in der Spule induzierte Spannung?
20b) Die Spule habe einen Widerstand R. Wie groß ist der Strom in der Spule, falls die Spulenenden geschlossen werden?
20c) Welche Energiemenge wird während der Einschaltzeit des Magneten in Wärme umgewandelt?
20d) Verwenden Sie abschliessend folgende Beispielwerte und diskutieren die Größenordnungen der Ergebnisse.
$B_0 = 1$ T; $T = 10$ s; $A = 100$ cm^2; $R = 0.5\ \Omega$.

Zur Beachtung: E-Mail-Nachricht vom 22.05.2014

Liebe Studentinnen und Studenten,

die Uni Rostock sieht sich als Präsenzuniversität, wir gehen davon aus, dass Studienerfolge wesentlich von einer aktiven Teilnahme an Vorlesungen und Übungen befördet werden. Gleichwohl gibt es keine Anwesentheitspflicht.

Voraussetzung für die Zulassung zur Prüfung ist bekanntlich, dass Sie 50 % der zu erreichenden Punkte der Übungsaufgaben erreichen. Da wir die Abgabe der Lösungen in Klein-Gruppen zulassen, ist natürlich nicht klar, in welchem Maße der Einzelne zur Lösung beigetragen hat. Deshalb lassen wir die Lösungen in der Übung durch die Studierenden vortragen.

Hier meine Ansage: Wer in der Übung keine Lösung präsentiert hat, wird nicht zur Prüfung zugelassen. Bitte bemühen Sie sich in den verbleibenden Übungsterminen (Beachten Sie auch den Nachholetermin am Do, 12. Juni, 9-11 Uhr, SR 1) aktiv darum, eine Lösung präsentieren zu dürfen.

Mit freundlichen Grüßen
Dr. Thomas Bornath

9. **Übungszettel: Elektromagnetische Wellen**
(Übung 29.05.2014 wird in der Projektwoche durchgeführt,
siehe dazu den Termin 12.06.2014)

Hausaufgaben (Serie 8) zum 27.05.2014 (Abgabe in der Vorlesung)

HA 21 Für eine ebene harmonische Welle, die sich in x-Richtung ausbreitet, seien das Vektorpotential $\vec{A}$ und das skalare Potential Φ durch folgende Ausdrücke gegeben:

$$\vec{A} = A_0 \cos(kx - \omega t)\, \vec{e}_z, \quad \Phi = 0\,.$$

Zwischen Wellenzahl k und Kreisfrequenz ω gilt die Beziehung $\omega = ck$.
Berechnen Sie das Magnetfeld $\vec{B}$ und das elektrische Feld $\vec{E}$. Skizzieren Sie $\vec{B}$ und $\vec{E}$ für den Zeitpunkt $t = 0$ über zwei Wellenlängen.
Zeigen Sie, dass die Lorentz-Eichung, $\nabla \cdot \vec{A} - \frac{1}{c^2}\frac{\partial \Phi}{\partial t} = 0$, erfüllt ist.

HA 22 Eine ebene Welle ist allgemein durch $\vec{E} = \vec{E}_0 \cos(\vec{k} \cdot \vec{r} - \omega t)$ gegeben. Was versteht man unter den Begriffen Amplitude, Wellenvektor, Wellenzahl, Wellenlänge, Kreis-Frequenz, Frequenz, Phasengeschwindigkeit c, Phase. Welche dieser Größen sind miteinander verknüpft.

HA 23 Elektromagnetische Wellen treten in verschiedenen Erscheinungsformen auf, insbesondere unterscheiden sich die Frequenzbereiche:
Radiowellen: $3 \cdot 10^4 ... 3 \cdot 10^9$ Hz
Mikrowellen: $3 \cdot 10^9 ... 10^{12}$ Hz
Licht: $10^{12} ... 5 \cdot 10^{17}$ Hz
Röntgenstrahlen: $3 \cdot 10^{16} ... 3 \cdot 10^{20}$ Hz
Gammastrahlen: $3 \cdot 10^{19} ... 3 \cdot 10^{22}$ Hz und höher.

Geben Sie die entsprechenden Bereiche für die Wellenlängen λ an ($\lambda f = c$). Wählen Sie in den verschiedenen Bereichen sinnvolle Längeneinheiten (cm, μm, nm, Å, etc.).

HA 24 Viele Zusammenhänge lassen sich einfacher mit komplexen Exponentialfunktionen darstellen. Es gilt die Eulersche Formel

$$e^{i\alpha} = \cos\alpha + i \sin\alpha \,.$$

Folglich ist $\cos\alpha = \mathrm{Re}\, e^{i\alpha} = \frac{1}{2}\left(e^{i\alpha} + (e^{i\alpha})^*\right)$ und $\sin\alpha = \mathrm{Im}\, e^{i\alpha}$.
Beweisen Sie die Additionstheoreme

$$\sin(x \pm y) = \sin x \cos y \pm \cos x \sin y$$

und

$$\cos(x \pm y) = \cos x \cos y \mp \sin x \sin y \,.$$

HA 25 Zeigen Sie, dass sowohl die Funktionen

$$\Phi_A(\vec{r}, t) = e^{i(\vec{k}\cdot\vec{r} - \omega t)}$$

als auch

$$\Phi_B(\vec{r}, t) = \mathrm{Re} \int \mathrm{d}^3k [a_1(k) + i a_2(k)] e^{i(\vec{k}\cdot\vec{r} - \omega t)} \,,$$

hier sind $a_1(k)$ und $a_2(k)$ reelle Funktionen und $\omega = ck$, die folgende homogene Differential-Gleichung (Wellengleichung)

$$\nabla^2 \Phi(\vec{r}, t) - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \Phi(\vec{r}, t)}{\partial t^2} = 0$$

lösen.
Hinweis: Benutzen Sie den Laplace-Operator $\Delta = \nabla^2$ in kartesischen Koordinaten.

10. **Elektromagnetische Wellen**
(05.06.2014, R. Mahnke)

Besprechung der Hausaufgaben (Serie 8) zu den elektromagnetischen Wellen. In diesem Zusammenhang sind zuvor folgende Fragen zu beantworten:

- Wie lauten die Maxwell–Gleichungen zur Berechnung des elektromagnetischen Feldes ($\vec{E}, \vec{B}$) im Vakuum (differentielle Schreibweise)?
- Wie sind die o. g. allgemeinen Maxwell–Gleichungen zu spezialisieren, damit die Bewegung einer elektromagnetischen Welle beschrieben wird?
- Wie lautet die homogene Wellengleichung für das elektrische bzw. magnetische Feld im Vakuum?
- Wie lautet die Dispersionsrelation für elektromagnetischen Wellen im Vakuum?

11. **Dipolstrahlung**
(Ersatz-Termin in der Projektwoche am 12.06.2014, 8 – 11 Uhr, SR 1, Th. Bornath)

Hausaufgaben (Serie 9) zum 12.06.2014

HA 26 Ein atomares Elektron wird durch Sonnenlicht zu einer Harmonischen Schwingung mit einer Amplitude von $d = 0.1$ nm angeregt. Das Dipolmoment des Elektrons ist $p = ed$ (e - Elementarladung). Wie groß ist die abgestrahlte Leistung,

$$P = \frac{p^2\omega^4}{12\pi\varepsilon_0 c^3},$$

für rotes Licht mit einer Wellenlänge $\lambda = 700$ nm und violettes Licht mit einer Wellenlänge $\lambda = 400$ nm. Setzen Sie die Leistungen auch ins Verhältnis.

HA 27 Die Strahlungsleistung der Sonne beträgt $P = 3.9 \cdot 10^{26}$ W. Die Erde befindet sich in einem Abstand $r = 1.5 \cdot 10^{11}$ m von der Sonne.

i. Wie groß ist die Intensität $I = P/(4\pi r^2)$ der Strahlung, die die Erde erreicht?

ii. In der Atmosphäre werden 30% absorbiert (wolkenloser Himmel, senkrechter Sonnenstand), wie groß ist die Intensität der Strahlung auf der Erdoberfläche?

iii. Berechnen Sie aus $I = c\frac{\varepsilon_0 E_0^2}{2}$ und $B_0 = E_0/c$ die Amplituden der elektrischen und magnetischen Felder.

iv. Sie planen eine Photovoltaikanlage und haben Module mit einem Wirkungsgrad von 20% zur Verfügung. Welche Fläche benötigen Sie, um eine Leistung von 10 kW zu erreichen?

HA 28 Der neue Sender Rostock-Krummendorf hat für die Frequenz 88.2 MHZ (NDR Kultur) eine geplante Senderleistung von 160 kW (zum Vergleich: LOHRO, 90.2 MHZ, 0.1 kW). Zur Vereinfachung nehmen wir an, dass die Austrahlung isotrop in alle Richtungen erfolgt.

i. Berechnen Sie das elektrische und das magnetische Feld in 1 km und in 100 km Entfernung.

ii. Hält man eine Drahschleife mit 40 cm Radius senkrecht zum Magnetfeld, so wird wegen $\frac{\mathrm{d}B(t)}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}B_0 \cos(\omega t)}{\mathrm{d}t}$ eine Spannung induziert. Wie groß sind diese Spannungen in 1 km und in 100 km Entfernung?

Themen der Übung am 12.06.2014

- Besprechung der Übungsaufgaben Serie 9 zur Dipolstrahlung
- Fragen zu elektromagnetischen Wellen
  (a) Aus welchen Maxwellgleichungen folgt, dass es keine reinen elektrischen Wellen oder keine reinen magnetischen Wellen geben kann?
  (b) Aus welchen Maxwellgleichungen folgt, dass ebene elektromagnetische Wellen im Vakuum transversal sind ($\vec{E} \perp \vec{k}$ und $\vec{B} \perp \vec{k}$)?
  (c) Warum steht $\vec{B} \perp \vec{E}$? (Einsetzen von $\vec{E} = \vec{E}_0 \cos[(\vec{k} \cdot \vec{r} - \omega t)]$ und $\vec{B} = \vec{B}_0 \cos[(\vec{k} \cdot \vec{r} - \omega t)]$ in die entsprechende Maxwellsche Gleichung; Berechnen der Rotation eines Vektorfeldes.)
- Problem der Speisung einer Glühlampe durch ein Koaxialkabel (siehe Schmüser Kap. 5.4.1.).
  (a) Berechnung des elektrischen Feldes und des magnetischen Feldes im Zwischen raum zwischen den Leitern.
  (b) Poynting-Vektor

(c) transportierte Leistung durch Integration des Poyntingvektors über die durchströmte Querschnittsfläche

12. **Interferenz und Beugung I**
(19.06.2014, R. Mahnke)

Themen der Übung am 19.06.2014

- Die Ausbreitung und Überlagerung von Wellen wird durch Interferenz und Beugung beeinflusst. Vergleich Wellen- und Strahlenoptik.
- Beugung am Einzelspalt (Spalt mit Breite a)

$$I(\Theta) = I_0 \left(\frac{\sin(\delta)}{\delta} \right)^2 ,$$

wobei $\delta(\Theta) = \pi a \sin\Theta/\lambda$.

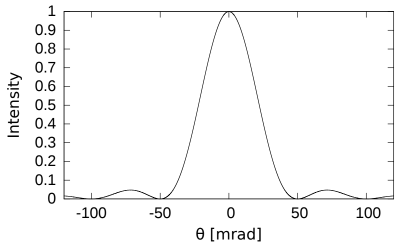


Abb. 1: Einzelspalt mit Spaltbreite $a = 0.01$ mm. Wellenlänge $\lambda = 500$ nm.

- Doppelspaltexperiment: Interferenz am Doppelspalt (Abstand d der beiden Spalte mit Breite a, wobei $a \ll d$)

$$I_{N=2}(\Theta) = 4I_0 \cos^2\delta = I_0 \left(\frac{\sin(2\delta)}{\sin(\delta)} \right)^2 ,$$

wobei $\delta(\Theta) = \pi d \sin\Theta/\lambda$.

- Beugung am Gitter ($N \gg 1$ Spalte mit Gitterkonstante d, wobei Abstand $d \ll a$)

$$I_N(\Theta) = I_0 \left(\frac{\sin(N\delta)}{\sin(\delta)} \right)^2 ,$$

wobei $\delta(\Theta) = \pi d \sin\Theta/\lambda$.

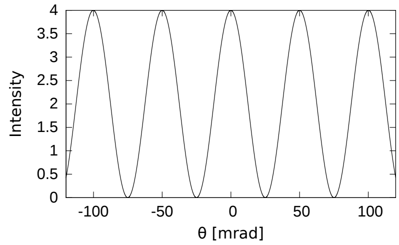


Abb. 2: $N = 2$ – Gitter mit Gitterkonstanten $d = 0.01$ mm. Wellenlänge $\lambda = 500$ nm.

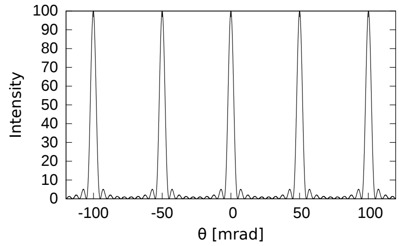


Abb. 3: $N = 10$ – Gitter mit Gitterkonstanten $d = 0.01$ mm. Wellenlänge $\lambda = 500$ nm.

- Das elektrische Feld eines Wellenpulses ist gegeben durch

$$E_z(y,t) = \frac{E_0}{\sigma}(y+ct)\exp\left(-\frac{(y+c\,t)^2}{2\sigma^2}\right) \; .$$

  Was ist zu berechnen bzw. zu überprüfen? Das macht Annelie Marx schriftlich (Abgabe am 26.06.2014).

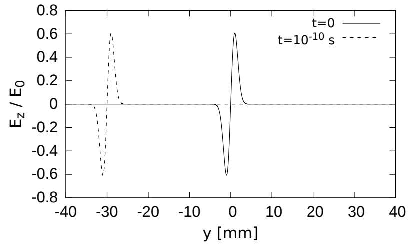


Abb. 4: Formstabile Bewegung des Wellenpulses (Breite $\sigma = 10^{-3}$ m) nach links mit Lichtgeschwindigkeit $c = 3 \cdot 10^8$ m/s.

13. **Interferenz und Beugung II**
(26.06.2014, Ch. Bräuning)

Hausaufgaben (Serie 10) zum 26.06.2014

HA 29 Skizzieren Sie die Intensitätsverteilung für die Beugung an einem Einfachspalt: I/I_0 als Funktion des Streuwinkels Θ (in mrad).

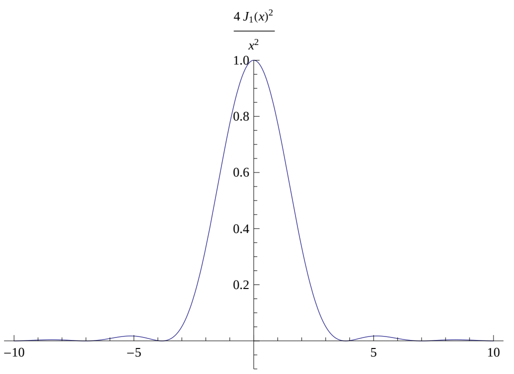
i. Die Wellenlänge sei $\lambda = 500$ nm. Die Spaltbreite betrage einmal $a = 50$ μm und einmal $a = 200$ μm.

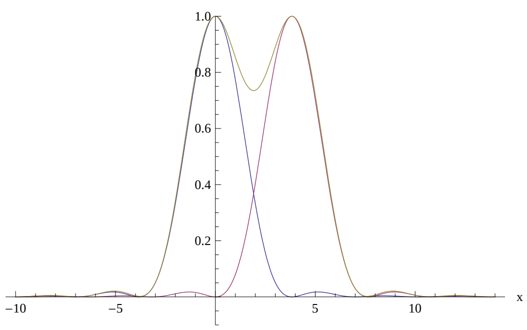
ii. Die Spaltbreite sei $a = 50$ μm. Zeichnen Sie die Beugungsbilder für $\lambda = 500$ nm und $\lambda = 650$ nm

HA 30 Die Beugung an einer Lochblende mit Durchmesser d wird durch eine Funktion ähnlicher Form wie an einem einfachen Spalt beschrieben:

$$I = I_0 \left(\frac{J_1(x)}{x/2} \right)^2 ,$$

mit $x = \frac{\pi d \sin\theta}{\lambda}$. Hier ist das Beugungsbild rotationssymmetrisch.





i. Die erste Nullstelle der Besselfunktion $J_1(x)$ liegt bei $x = 3.8317$. Unter welchem Beugungswinkel Θ findet man das erste Beugungsminimum? (Kann man $\sin\Theta \approx \Theta$ benutzen?) Vergleichen Sie mit dem einfachen Spalt.

ii. Um zwei entfernte Punktlichtquellen trennen zu könne, muss das Maximum des zweiten Beugungsscheibchens außerhalb des 1. Beugungssminimums des erten Beugungsscheibchens liegen. Formulieren Sie daraus ein Kriterium für den minimalen Winkelabstand der beiden Punktlichtquellen.

HA 31 Beim menschlichen Auge stellt die Pupille eine Lochblende dar, bei Tageslicht ist der Pupillendurchmesser $p \approx 2$ mm. Durch die Linse erfolgt eine Abbildung der Beugungsscheibe einer punktförmigen Lichtquelle in der einfachen Brennweite $f \approx 17$ mm auf der Netzhaut.

i. Berechnen Sie den Durchmesser des Beugungsscheibchens,

$$D = \frac{1.22 f \lambda}{p} \,,$$

für eine Wellenlänge von $\lambda = 550$ nm. Im Bereich der Fovea centralis hat das menschliche Auge 140.000 Zapfen pro mm^2. Schätzen Sie den Zapfendurchmesser ab und vergleichen Sie mit dem Durchmesser des Beugungsscheibchens.

ii. Der Adler hat eine Pupillengröße von 6 mm und einen kürzeren Augapfel (kleinere Brennweite). Welche Vorteile ergeben sich daraus?

iii. Die Scheinwerfer eines Autos haben eine Abstand von 1.25 m. Wie weit darf das Auto entfernt sein, damit ein Beobachter bei Dunkelheit die beiden Lampen gerade noch als zwei getrennte Lichtquellen wahrnehmen kann? Der Pupillendurchmesser in der Dunkelheit sei 5 mm.

HA 32 Leiten Sie die Wellengleichung für $\vec{E}$ und $\vec{B}$ in nichtleitenden, linearen Medien her.

HA 33 Wie groß ist die relative Dielektrizitätskonstante (Permittivität) ε_r von Glas für sichtbares Licht ($n \approx 1.5$)?

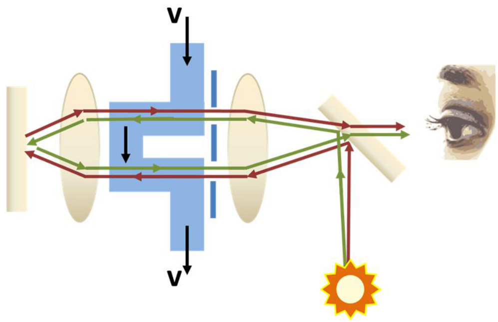
14. **Spezielle Relativitätstheorie**

(03.07.2014, R. Mahnke)

Hausaufgaben (Serie 11) zum 03.07.2014

HA 34 Von Hippolyte **Fizeau** wurde 1851 ein Experiment durchgeführt, in dem ein Lichtstrahl in zwei Teilstrahlen aufgeteilt wurde, die durch zwei Wasserrohre mit entgegengesetzter Fließrichtung des Wassers geführt und danach zur Interferenz gebracht wurden.

Das Experiment konnte eine Vorhersage von Augustin Jean **Fresnel** bestätigen: Licht wird vom fließenden Wasser mitgeführt. Die Lichtgeschwindigkeit in einem bewegten Medium mit Brechungsindex n hängt vom Betrag und der Richtung der Geschwindigkeit



v des Mediums ab

$$c^* = \frac{c}{n} \pm v \left(1 - \frac{1}{n^2}\right) .$$

Vom Labor aus gesehen wird es schneller, wenn es sich in Fließrichtung des Wassers bewegt, und langsamer, wenn es sich entgegen der Fließrichtung des Wassers bewegt.

i. Das System S' bewege sich mit der Geschwindigkeit $\pm v$ in z-Richtung gegenüber dem Laborsystem S. Zeigen Sie, dass für die Geschwindigkeit eines Objektes, $u_z = \frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}t}$ bzw. $u'_z = \frac{\mathrm{d}z'}{\mathrm{d}t'}$, die Transformation

$$u_z = \frac{u'_z \pm v}{1 \pm \frac{vu'_z}{c^2}}$$

gilt. (Vgl. Abschnitt 6.2.4 im Schmüser).

ii. Im Ruhsystem S' des sich mit der Geschwindigkeit v bewegenden Wassers hat das Licht die Geschwindigkeit $u = \frac{c}{n}$. Leiten Sie das Fizeau-Ergebnis für die im Laborsystem festgestellte Lichtgeschwindigkeit c^* her. Dabei ist auszunutzen, dass die Geschwindigkeit v des Wassers sehr viel kleiner als c ist und die Transformationsgleichung durch eine Taylorentwicklung vereinfacht werden kann.

HA 35 Die Komponenten eines Vierervektors $a^\mu = (a^0, a^1, a^2, a^3)$ transformieren sich bei einem Wechsel des Bezugssystems wie folgt:

$$a^0 = \gamma a^{0'} + \beta\gamma a^3 \tag{3}$$
$$a^1 = a^{1'} \tag{4}$$
$$a^2 = a^{2'} \tag{5}$$
$$a^3 = \beta\gamma a^{0'} + \gamma a^3 \tag{6}$$

mit $\beta = v/c$ und $\gamma = 1/\sqrt{1 - v^2/c^2}$. Für den Vektor $x^\mu = (ct, x, y, z)$ wurde das in der Vorlesung behandelt.

i. Betrachten Sie den Viererimpuls $p^\mu = (\frac{E}{c}, p_x, p_y, p_z)$. Hier ist E die Energie eines Teilchens und p_x, p_y, p_z die Impulskomponenten von $\vec{p}$ in x-, y-, z-Richtung. (Achtung: Im "Schmüser" werden alle Komponenten mit c multipliziert, das ist eher unüblich.)
   Ein Teilchen fliege mit der Geschwindigkeit v in z-Richtung. In dem sich mit v bewegenden Bezugssystem S' (Ruhesystem des Teilchens) gilt $E' = m_0 c^2$ und $p'_x = p'_y = p'_z = 0$. m_0 ist die Ruhemasse des Teilchens. Geben Sie E, p_x, p_y und p_z an.

ii. Der dem kontravarianten Vierervektor $p^\mu = (\frac{E}{c}, p_x, p_y, p_z)$ zugeordnete kovariante Vierervektor ist $p_\mu = (\frac{E}{c}, -p_x, -p_y, -p_z)$. Das Produkt $\sum_{\mu=0}^{3} p_\mu p^\mu$ verändert sich nicht unter einer Lorentz-Transformation.
   Zeigen Sie, dass aus $\sum_{\mu=0}^{3} p_\mu p^\mu = \sum_{\mu=0}^{3} p'_\mu p'^\mu$ die Energie-Impuls-Relation

$$\boxed{E^2 = m_0^2 c^4 + p^2 c^2} \tag{7}$$

   folgt.

HA 36 Eine Lichtquelle nähert sich einem Beobachter mit der Geschwindigkeit $v = \beta c$. Im Ruhesystem S' der Quelle wird die Frequenz f' ausgesendet. Der Beobachter misst eine andere Frequenz f.

i. Leiten Sie aus der Lorentz-Transformation des Vierimpulses $p^\mu = (\frac{E}{c}, p_x, p_y, p_z)$, siehe (3), die Formel für den relativistischen Dopplereffekt,

$$f = \gamma f'(1 + \beta) = f' \sqrt{\frac{1 + \beta}{1 - \beta}},$$

   her. Benutzen Sie dazu die Vorstellung, dass das Licht aus Photonen (Lichtteilchen) besteht, die in S' eine Energie $E' = hf'$ und einen Impuls $p'_z = \frac{E'}{c} = \frac{hf'}{c}$ besitzen.

ii. Wie lautet die relativistische Dopplerformel für eine Quelle, die sich vom Beobachter entfernt?

Themen der Übung am 03.07.2014

- Einstein-Formel
- Inertialsystem
- Relativitätsprinzip
- Galilei-Transformation
- Lorentz-Transformation
- Addition von Geschwindigkeiten
- Relativistische Massenzunahme
- Energie-Impuls-Beziehung (und Spezialfälle)
- Minkowski-Raum
- Vierervektoren
- Erhaltungssatz $\partial_\mu J^\mu = 0$

15. **Dynamik von Feldern und Teilchen**
(10.07.2014, R. Mahnke)

Letzte Übung als Konsultation zum Thema *Dynamik des elektromagnetischen Feldes* im Vergleich zur *Dynamik von Teilchen*

Themen der Übung am 03.07.2014

- Eine Aufgabe

Ein relativistisches Teilchen der Masse m bewegt sich in einem Inertialsystem mit der Geschwindigkeit $v = \beta c$ und es ist $\gamma = 1/\sqrt{1-\beta^2}$. Die Gesamtenergie des Teilchens ist E, seine kinetische Energie E_{kin}, seine Ruhenergie E_0 und sein Impuls p. Mit α wird das Verhältnis E_{kin}/E_0 abgekürzt.

(a) Beweise: $p = m_0 c\sqrt{\gamma^2 - 1} = m_0 c\sqrt{\alpha(\alpha+2)}$

(b) Das relativistische Teilchen der Ladung q tritt senkrecht zu den Feldlinien in ein Magnetfeld mit der Stärke B ein und beschreibt eine Kreisbahn mit Radius r. Drücken Sie r durch E_{kin} aus.

(c) Welche Beschleunigungsspannung U hat ein zunächst ruhendes Elektron durchlaufen, das in einem Beschleuniger bei $B = 5.0$ T eine Kreisbahn mit $r = 4.0$ km beschreibt?