
Stochastische Prozesse in der Physik

Sommersemester 2015

Priv.-Doz. Dr. Reinhard Mahnke
Institut für Physik

Lehrveranstaltung Nr. 12637
(2 SWS V + 2 SWS Ü)
im Rahmen des Studiengangs *Bachelor in Physik*
und
des Studiengang *Lehramts an Gymnasien in Physik*

V: Dienstag 7.15 bis 8.45 Uhr, Konferenzraum Wismarsche Str. 44

Ü: Freitag 7.30 bis 9.00 Uhr, Konferenzraum Wismarsche Str. 44

Übungsleiter: MSc. Sebastian Rosmej

PHYSICS OF STOCHASTIC PROCESSES

In addition, everyone (studying in first or second cycle)
from other faculties of Rostock University or from abroad
who likes to learn model-driven approaches rather
than purely statistical ones is welcome.

Die Lehrveranstaltung begann mit der ersten Vorlesung am
Dienstag, d. 07.04.2015 um 15.15 Uhr im Großen Hörsaal
Physik am Universitätsplatz 3.

The Importance of Being Noisy – Stochasticity in Science

Why stochastic tools? When you asked alumni graduated from European universities moving into nonacademic jobs in society and industry what they actually need in their business, you found that most of them did stochastic things like time series analysis, data processing etc., but that had never appeared in detail in university courses.

Aim The general aim is to provide stochastic tools for understanding of random events in many beautiful applications of different disciplines ranging from econophysics up to sociology which can be used multidisciplinary.

State of the art General problem under consideration is the theoretical modeling of complex systems, i. e. many-particle systems with nondeterministic behavior. In contrast to established classical deterministic approach based on trajectories we develop and investigate probabilistic dynamics by stochastic tools such as stochastic differential equation, Fokker-Planck and master equation to get probability density distribution. The stochastic apparatus provides more understandable and exact background for describing complex systems. The idea goes back to Einstein's work on Brownian motion in 1905 which explains diffusion process as fluctuation problem by Gaussian law as a special case of Fokker-Planck equation.

Textbooks

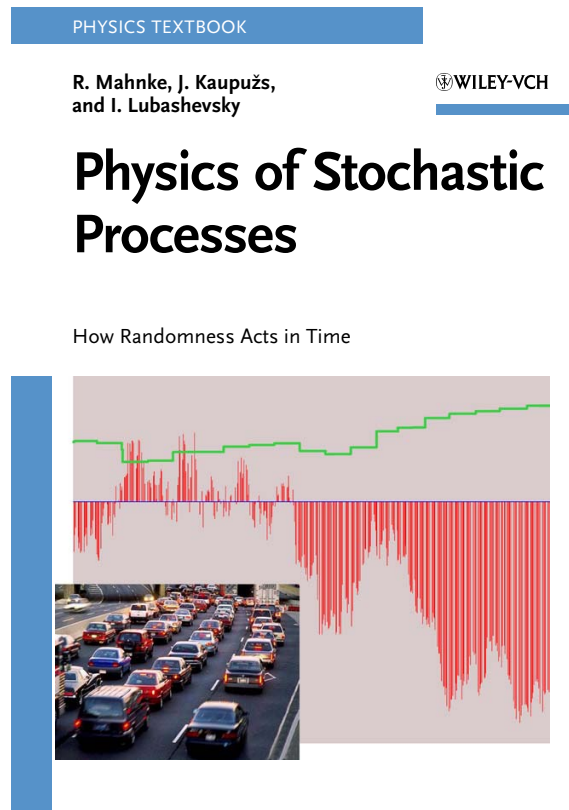


Fig. 1: R. Mahnke, J. Kaupužs and I. Lubashevsky: *Physics of Stochastic Processes*, Wiley-VCH, Weinheim, 2009.

Literatur:

- H. Risken: *The Fokker-Planck Equation*, Springer, 1984
- W. Paul, J. Baschnagel: *Stochastic Processes*, Springer, 1999
- C. W. Gardiner: *Handbook of Stochastic Methods*, Springer, 2004
- V. S. Anishchenko et. al: *Nonlinear Dynamics of Chaotic and Stochastic Systems*, Springer, 2007
- M. Ullah, O. Wolkenhauer: *Stochastic Approaches for Systems Biology*, Springer, 2011
- T. Tome, M. J. de Oliveira: *Stochastic Dynamics and Irreversibility*, Springer, 2015

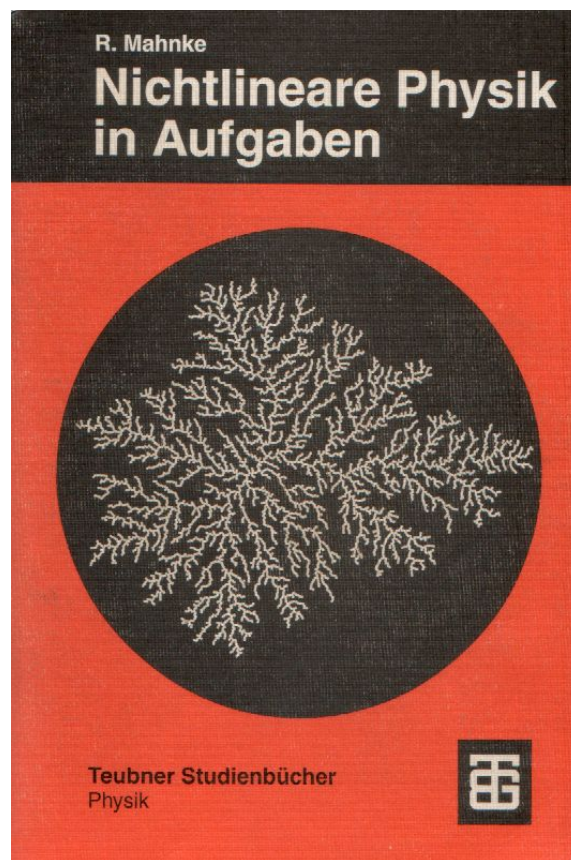


Fig. 2: R. Mahnke: *Nichtlineare Physik in Aufgaben*, Teubner–Studienbücher, Stuttgart, 1994.

Literatur:

- Henry D. I. Abarbanel et. al: Introduction to Nonlinear Dynamics for Physicists, World Scientific, Singapore, 1993
- F. Verhulst: Nonlinear Differential Equations and Dynamical Systems, Springer, Berlin, 1990
- H. G. Schuster: Deterministic Chaos, VCH, Weinheim, 1989

Inhaltsverzeichnis

1 Einführung	7
(0. Vorlesung 07.04.2015)	
2 Master Gleichung	8
2.1 Eindimensionale diskrete Master-Gleichung I (1. Vorlesung 14.04.2015)	8
2.2 Eindimensionale diskrete Master-Gleichung II (2. Vorlesung 21.04.2015)	8
2.3 Das 2-Niveau-System (2. Übung 17.04.2015)	8
2.4 Einschnitt-Master-Gleichung I (3. Vorlesung 28.04.2015)	8
2.5 Einschnitt-Master-Gleichung II (4. Vorlesung 05.05.2015)	9
2.6 Insolvenzvorhersage in einem 3-Niveau-System (3. Übung 08.05.2015)	9
2.7 Zeitdiskrete Markov Prozesse (5. Vorlesung 12.05.2015)	9
3 Fokker-Planck Gleichung	10
3.1 Eindimensionale Fokker-Planck Gleichung (6. Vorlesung 29.05.2015)	10
3.2 Lösung der Fokker-Planck Gleichung (7. Vorlesung 02.06.2015)	10
3.3 Schrödingerartige Fokker-Planck Gleichung (8. Vorlesung 09.06.2015)	10
4 Langevin Gleichung	11
4.1 Brownsche Bewegung im Geschwindigkeitsraum I (9. Vorlesung 16.06.2015)	11

4.2	Brownsche Bewegung im Geschwindigkeitsraum II (10. Vorlesung 23.06.2015)	11
4.3	Geometrische Brownsche Bewegung (Aktienkurdynamik) I (11. Vorlesung 30.06.2015)	11
4.4	Geometrische Brownsche Bewegung (Aktienkurdynamik) II (12. Vorlesung 07.07.2015)	11
4.5	Stochastische Integration (13. Vorlesung 14.07.2015)	11
5	Nichtlineare dynamische Systeme	12
5.1	Das mathematische Pendel (1. Übung 09.04.2015)	12
5.2	Die logistische Abbildung (4. Übung 19.05.2015)	12

1 Einführung

(0. Vorlesung 07.04.2015)

Grundgleichungen der Physik stochastischer Prozesse sind

- Master-Gleichung
- Fokker-Planck-Gleichung
- Langevin-Gleichung

2 Master Gleichung

2.1 Eindimensionale diskrete Master-Gleichung I (1. Vorlesung 14.04.2015)

Master-Gleichung:

$$\frac{dP(n, t)}{dt} = \sum_{n' \neq n} \{w(n, n')P(n', t) - w(n', n)P(n, t)\} \quad (1)$$

mit Übergangsraten $w(n', n) \geq 0$ von n zu $n' \neq n$.
Anfangsbedingung $P(n, t = 0)$ für $(n = 1, 2, \dots, N)$ und
Randbedingungen bei $n = 1$ und $n = N$.

2.2 Eindimensionale diskrete Master-Gleichung II (2. Vorlesung 21.04.2015)

Definiere Evolutionsmatrix W , definiere Wahrscheinlichkeitsvektor $P(t)$, somit folgt die Master Gleichung in Vektor-Matrix-Schreibweise inklusive Anfangsbedingung

$$\frac{dP(t)}{dt} = WP(t) \quad ; \quad P(t = 0) = P(0) . \quad (2)$$

Stationäre Lösung ist Langzeitlösung

2.3 Das 2-Niveau-System (2. Übung 17.04.2015)

2.4 Einschnitt-Master-Gleichung I (3. Vorlesung 28.04.2015)

Wegen $n' = n \pm 1$ lautet die Einschnitt-Master-Gleichung:

$$\begin{aligned} \frac{dP(n, t)}{dt} &= w(n, n-1)P(n-1, t) + w(n, n+1)P(n+1, t) & (3) \\ &\quad - [w(n-1, n) + w(n+1, n)]P(n, t) & (4) \end{aligned}$$

mit Übergangsraten $w(n+1, n) = w_+(n)$ von n zu $n+1$ und $w(n-1, n) = w_-(n)$ von n zu $n-1$.
Anfangsbedingung $P(n, t=0)$ für $(n = 1, 2, \dots, N)$ und
Randbedingungen bei $n = 0$ (z. B. absorbierend) und $n = N$ (z. B. reflektierend).

2.5 Einschnitt-Master-Gleichung II **(4. Vorlesung 05.05.2015)**

2.6 Insolvenzvorhersage in einem 3-Niveau-System **(3. Übung 08.05.2015)**

2.7 Zeitdiskrete Markov Prozesse **(5. Vorlesung 12.05.2015)**

3 Fokker-Planck Gleichung

**3.1 Eindimensionale Fokker-Planck Gleichung
(6. Vorlesung 29.05.2015)**

**3.2 Lösung der Fokker-Planck Gleichung
(7. Vorlesung 02.06.2015)**

**3.3 Schrödingerartige Fokker-Planck Gleichung
(8. Vorlesung 09.06.2015)**

4 Langevin Gleichung

- 4.1 Brownsche Bewegung im Geschwindigkeitsraum I
(9. Vorlesung 16.06.2015)
- 4.2 Brownsche Bewegung im Geschwindigkeitsraum II
(10. Vorlesung 23.06.2015)
- 4.3 Geometrische Brownsche Bewegung (Aktienkustodynamik) I
(11. Vorlesung 30.06.2015)
- 4.4 Geometrische Brownsche Bewegung (Aktienkustodynamik) II
(12. Vorlesung 07.07.2015)
- 4.5 Stochastische Integration
(13. Vorlesung 14.07.2015)

5 Nichtlineare dynamische Systeme

5.1 Das mathematische Pendel (1. Übung 09.04.2015)

5.2 Die logistische Abbildung (4. Übung 19.05.2015)