
Mathematische Hilfsmittel für Lehramt und Beifach

PD Dr. Reinhard Mahnke
Institut für Physik

Lehrveranstaltung Nr. 12557 (2 SWS V + 2 SWS Ü)

Mittwoch 7.15 bis 8.45 Uhr, Seminarraum HG306
Freitag 7.15 bis 8.45 Uhr, Seminarraum HG306
Wintersemester 2008/09

Inhaltsangabe:

1. **Komplexe Zahlen I** (15.10.2008, R. Mahnke)
Quadratische Gleichung (Variable x , Parameter p, q) zur Nullstellenberechnung, Einschränkung im Raum der reellen Zahlen, Verweis auf *nicht-lineare* Funktionen, Einführung und Definition der komplexen Zahlen $z = x + iy$ und ihre Darstellung in der Gaußschen Zahlenebene, Imaginäre Einheit i mit $i^2 = -1$, Grundrechenarten (Addition, Subtraktion, Multiplikation)
2. **Komplexe Zahlen II** (17.10.2008, R. Mahnke)
Grundrechenarten, bei Division Erweiterung mit konjugiert komplexer Zahl $z = x - iy$, Polardarstellung mit Hilfe trigonometrischer Funktionen $z = r(\cos \alpha + i \sin \alpha)$, Hin- und Rücktransformation zwischen kartesischen (x, y) und polaren Koordinaten (r, α)

Übungsaufgaben Serie 1 (Abgabe zum 24.10.08)

(1a) Berechnen Sie Real- und Imaginärteil:

$$z = \frac{2i - 1}{i - 2}$$

(1b) Werten Sie auf einfache Weise aus (Polardarstellung) und berechnen Sie Real- und Imaginärteil:

$$z = \frac{(1 + i)^4}{(1 - i)^4}$$

3. **Komplexe Zahlen III** (22.10.2008, R. Mahnke)

Neue (dritte) Darstellung einer komplexen Zahl z mittels Euler-Formel, z. B. $z = 1 + i = \sqrt{2}(\cos(\pi/4) + i \sin(\pi/4)) = \sqrt{2} e^{i\pi/4}$, einfache Berechnung von Potenzen z^n durch Euler-Darstellung, 2π -Periodizität der komplexen Exponentialfunktion (analog $\sin x$ und $\cos x$), Ausblick auf die Gleichung $z^n = 1$

Übungsaufgaben Serie 2 (Berechnung am 24.10.08)

(2a) Nullstellen einer komplexen Funktion $w = f(z)$

(2b) Beispiel: Lösung der quadratischen Gleichung

$$z^2 - 2i = 0$$

4. **Übung: Komplexe Zahlen I – III** (24.10.2008, R. Mahnke)

Übungsaufgaben Serie 2 (komplexe Funktionen und deren Nullstellen) ausführlich diskutiert. Für das o. g. Beispiel gilt

$$z^2 - 2i = 0 \quad \Rightarrow \quad z_{1,2} = \pm\sqrt{2i} = (1 + i, -1 - i)$$

Die Lösungen der Serie 1 lauten

$$z = \frac{2i - 1}{i - 2} = \frac{4}{5} - \frac{3}{5}i$$

und

$$z = \frac{(1 + i)^4}{(1 - i)^4} = i^4 = 1$$

5. **Komplexe Zahlen IV** (29.10.2008, R. Mahnke)

Newton–Iteration zur Berechnung von Nullstellen reeller Funktionen $f(x)$ mittels $x_{m+1} = x_m - f(x_m)/f'(x_m)$. Grafische Herleitung und Erläuterung an Hand eines Beispiels. Übertragung des Newton–Numerik in die komplexe Ebene zur Nullstellenberechnung einer komplexen Funktion $f(z)$. Analytische Berechnung der Nullstellen von Potenzfunktionen ersten bis vierten Grades $f(z) = z^n - 1$ mit $n = 1, 2, 3, 4$. Diskussion an Hand der kubischen Gleichung ($n = 3$) über die Existenz von drei Nullstellen auf dem Einheitskreis. Berechnung der drei Nullstellen z_k mit $k = 0, 1, 2$ der kubischen Gleichung $z^3 - 1 = 0$ mittels $z_k = \exp\{i 2\pi/3 k\}$ zu $z_0 = 1$ und $z_{1,2} = -1/2 \pm i\sqrt{3}/2$.

Übungsaufgaben Serie 3 (Abgabe zum 05.11.08)

- (3a) Leiten Sie die Newton–Iteration zur Berechnung von Nullstellen reeller Funktionen $f(x)$ her. Erläutern Sie anhand einer Grafik.
- (3b) Wie lautet der Newton–Iterationsalgorithmus im Sinne eines Struktogramms (Flussdiagramm) als Ablaufplan eines Computerprogramms?
- (3c) Wenden Sie die Newton–Iteration zur Berechnung von Nullstellen am Beispiel der reellen Funktion $f(x) = 8x^2 - 2$ an. Erklären Sie das folgende Computerprogramm (Sprache C++) zur numerischen Ermittlung der (einzigen) Nullstelle $x_0 = 1/2$.

```
/*  
Author: Christof Liebe  
*/
```

```
#include <iostream>  
#include <iomanip>  
#include <cmath>  
  
using namespace std;  
  
double func(double x){  
return 8.0*x*x-2.0;  
}  
  
double deri(double x){  
return 16.0*x;  
}
```

```

int main(int argc, char *argv[]){
int n=0;
double x=18.0;
cout << "  n |      x" << endl;
cout << "----+-----" << endl;
for(n=0; n<11; n++){
cout << setw(3)
      << n
      << " | "
      << setw(11)
      << setprecision(8)
      << fixed
      << x
      << endl;
x=x-func(x)/deri(x);
}
return 0;
}

```

```

/*
Ausgabeliste:

```

```

  n |      x
----+-----
  0 | 18.00000000
  1 |  9.00694444
  2 |  4.51735040
  3 |  2.28634629
  4 |  1.19784553
  5 |  0.70327679
  6 |  0.52937780
  7 |  0.50081516
  8 |  0.50000066
  9 |  0.50000000
 10 |  0.50000000

```

```

*/

```

- (3d) Berechnen Sie für das Beispiel der komplexen kubischen Funktion $f(z) = z^3 - 1$ die Newton-Iterationsformeln getrennt nach Real- und Imaginärteil.
- (3e) ZUSATZ:
 Betrachten Sie speziell die Iteration auf der reellen Achse ($y = 0$).
 Welche Punkte ($x_i < 0, y = 0$) konvergieren auf den divergenten Punkt

$(x = 0, y = 0)$?

Berechnen Sie die Anfangsbedingung $(x_0 < 0, y_0 = 0)$, die nach genau einer Iteration auf den Koordinatenursprung führt.

6. **Feiertag** (31.10.2008)

7. **Komplexe Zahlen V + Numerik** (05.11.2008, R. Mahnke)

Wiederholung Newton-Iteration zur Berechnung von Nullstellen am Beispiel der reellen Funktion $f(x) = 8x^2 - 2$; Erläuterung eines Computerprogramms zur numerischen Ermittlung der (einzigen) Nullstelle $x_{st} = 0.5$ (siehe Aufgabe 3c).

Übertragung des Newton-Verfahrens in die komplexe Ebene zur Nullstellenberechnung der komplexen Funktion $f(z)$. Diskussion an Hand der kubischen Gleichung $f(z) = z^3 - 1 = 0$ mit ihren drei Nullstellen auf dem Einheitskreis, deren Einzugsgebiete durch komplizierte Trennkurven begrenzt sind. Hinweis auf fraktale Strukturen.

8. **Komplexe Zahlen VI** (07.11.2008, R. Mahnke)

Komplexe Darstellung von trigonometrischen Funktionen; Hyperbelfunktionen; Verweis auf komplexe Schreibweise von Schwingungen und Wellen am Beispiel der komplexen Funktion $z(t) = Ae^{i\omega t}$.

Lösung einer quadratischen Gleichung mit komplexen Koeffizienten in Normalform $z^2 + (1 + i)z - 2(1 - i) = 0$. Angabe der Nullstellen in der Form $z_{1,2} = x_{1,2} + iy_{1,2}$. Diskussion verschiedener Lösungsvarianten mittels Trennung in Real- und Imaginärteil oder Transformation in Polarkoordinaten. Hilfreich ist die Anwendung des Satzes von Vieta (siehe Serie 4).

9. **Differentialrechnung** (12.11.2008, R. Mahnke)

Definition der ersten Ableitung $f'(x)$ als Differentialquotienten $df(x)/dx$ und Vergleich mit dem Differenzenquotienten $\Delta f(x)/\Delta x$. Berechnung der ersten Ableitung am Beispiel $f(x) = x^2$. Zweite und höhere Ableitungen. Gewöhnliche (d) und partielle (∂) Ableitungen (bei Funktionen mehrerer Variablen).

10. **Differentialgleichung** (14.11.2008, R. Mahnke)

Totales Differential $df(x, y, z)$ ein- und mehrdimensionaler Funktionen. Beispiel: Kugelvolumen $V(r)$, Unterschied zwischen Differenz ΔV und Differential dV . Einführung des Begriffs *gewöhnliche Differentialgleichung* 1. Ordnung, Erweiterung auf Differentialgleichung n -ter Ordnung. Es gilt der Satz: Die allgemeine Lösung einer Dgl n -ter Ordnung enthält n Integrationskonstanten. Hinweis auf partielle Differentialgleichungen (wichtig in der Physik, siehe Schrödinger Gleichung oder

Fokker–Planck Gleichung). Trennung der Variablen ist eine Methode zum Lösen von (einfachen) Differentialgleichungen.

11. **Differential– und Integralrechnung I** (19.11.2008, R. Mahnke)
Wiederholung der Differentiationsregeln (insbesondere Produkt– und Kettenregel). Extremwertaufgabe (häufig bei Kurvendiskussion). Integral und Stammfunktion, bestimmtes und unbestimmtes Integral. Wiederholung von Integrationstechniken (insbesondere Variablentransformation, partielle Integration). Differentiation von Integralen. Verweis auf mehrdimensionale Integrale.

Übungsaufgaben Serie 5 (Abgabe zum 21.11.2008)

- (5a) Lösen Sie mittels Variablentransformation:

$$I_1 = \int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} dx$$

und

- (5b)

$$I_2 = \int \cos x \sin^2 x dx$$

- (5c) Lösen Sie mittels partieller Integration:

$$I_3 = \int_a^b x \cos x dx$$

- (5d) Lösen Sie mittels zweimaliger partieller Integration:

$$I_3 = \int x^2 e^{-x} dx$$

- (5e) Informieren Sie sich über numerische Integration. Wie lautet die Trapezregel im Gegensatz zur Simpson–Formel?

- (5f) Was ist ein Kurvenintegral?

- (5g) Berechnen Sie jeweils das totale Differential für die folgenden Funktionen:

$$\begin{array}{lll} f(x) = 5; & f(x) = 5x; & f(x) = 5x^2 \\ f(x) = 5 + x + x^2; & f(x) = axe^{3x}; & f(x) = b \sin(\cos x) \end{array}$$

12. **Differential- und Integralrechnung II** (21.11.2008, R. Mahnke)
 Diskussion der Übungsaufgaben Serie 5, insbesondere Integration mittels Substitution und partieller Integration als auch Wiederholung des totalen Differentials $df(x) = dx df(x)/dx$.
 Erweiterung des Begriffs der Differentialgleichung auf ein System von zwei gekoppelten Differentialgleichungen. Ermittlung der Lösung mittels Transformation der Variablen mit dem Ziel der Entkopplung in zwei unabhängige Differentialgleichungen, die dann separat mittels Trennung der Variablen integriert werden können. Ein Beispiel stellt die Übungsaufgabe Serie 6 dar.

Übungsaufgaben Serie 6 (Abgabe zum 26.11.2008)

- (6a) Lösen Sie mittels Variablentransformation:

$$\begin{aligned}\frac{dx}{dt} &= -x + y \\ \frac{dy}{dt} &= -x - y\end{aligned}$$

oder (höherer Schwierigkeitsgrad)

- (6b)

$$\begin{aligned}\frac{dx}{dt} &= x - y - x(x^2 + y^2) \\ \frac{dy}{dt} &= x + y - y(x^2 + y^2)\end{aligned}$$

13. **Dynamische Systeme I** (26.11.2008, R. Mahnke)

Der Begriff des dynamischen Systems erweitert die Differentialgleichung (als Bewegungsgleichung in der Zeit) um die Anfangsbedingung (den Wert zum Startzeitpunkt). Im allgemeinen sind nichtlineare dynamische Systeme zu kompliziert, um die Lösung als Zeitentwicklung analytisch durch Integration angeben zu können. Häufig beschränkt man sich auf die Ermittlung der stationären Zustände, auch Fixpunkte genannt. Ein stationären Zustand heißt stabil (andernfalls instabil), wenn eine kleine Störung (Schwankung, Fluktuation) im Laufe der Zeit abklingt. Mehrdimensionale dynamische Systeme sind in der Regel verkettet. Das folgende zweidimensionale dynamische System ist ein Lehrbuchbeispiel (lineare unabhängige Gleichungen)

$$\begin{aligned}\frac{dr}{dt} &= a_1 r & ; & & r(t=0) &= r_0 , \\ \frac{d\alpha}{dt} &= a_2 & ; & & \alpha(t=0) &= \alpha_0\end{aligned}$$

und somit explizit mittels Trennung der Variablen sofort lösbar

$$\begin{aligned}r(t) &= r_0 \exp\{a_1 t\}, \\ \alpha(t) &= a_2 t + \alpha_0.\end{aligned}$$

14. **Dynamische Systeme II** (28.11.2008, R. Mahnke)

Fortsetzung der Diskussion des Lehrbuchbeispiels vom 26.11.2008. Ermittlung der Bahnkurve (Trajektorie) aus den zeitabhängigen Lösungen durch Invertierung und Einsetzen. Das Ergebnis lautet

$$r(\alpha) = r_0 \exp\left\{\frac{a_1}{a_2}(\alpha - \alpha_0)\right\}.$$

In Abhängigkeit vom Vorzeichen der Kontrollparameter a_1, a_2 sind verschiedene Situationen zu unterscheiden (stabiler/instabiler Strudel, Wirbel, stabiler/instabiler Knoten).

15. **Dynamische Systeme III** (03.12.2008, R. Mahnke)

Diskussion der Übungsaufgaben Serie 6. Das dynamische System 6a) lässt sich durch Transformation auf Polarkoordinaten einfach analytisch lösen. Die Bahnkurve $r(\alpha) = r_0 \exp\{\alpha - \alpha_0\}$ beschreibt logarithmische Spiralen in Richtung auf den Koordinatenursprung. Die Drehung erfolgt im Uhrzeigersinn. Der stationäre Lösung ist ein stabiler Strudel im Koordinatenursprung. Das erweiterte dynamische System 6b), ebenfalls mittels Transformation analytisch lösbar, besitzt einen stabilen Grenzzyklus und einen instabilen Strudelpunkt. Beide Systeme beschreiben Schwingungen.

16. **Vektoren und Matrizen I** (05.12.2008, R. Mahnke)

Kompakte Schreibweise von Gleichungen mittels Matrizen und Vektoren; Verknüpfungen (Addition, Subtraktion, Multiplikation) von Matrizen bzw. Vektoren; Lösung von linearen Gleichungssystemen mittels Inversion (inverse Matrix) oder Cramerscher Regel mittels Determinantenberechnung. Verweis auf Kommutatoreigenschaft (Nichtvertauschbarkeit). Eigenwertgleichung (Diagonalisierung) zur Bestimmung von Eigenwerten und Eigenvektoren.

Übungsaufgaben Serie 7 (Abgabe zum 10.12.2008)

- (a) Was ist eine Matrix?
Ist $AB = BA$ (Matrixmultiplikation)?
Was ist ein Kommutator?

(b) Schreiben Sie

$$\begin{aligned}a_{11} &= 10 \\ a_{12} = a_{21} &= -3 \\ a_{22} &= 2\end{aligned}$$

in Matrixform (Matrix A) und bestimmen Sie die Eigenwerte der Matrix.

(c) Bestimmen Sie die Eigenvektoren zu den oben berechneten Eigenwerten von A . Normieren Sie diese Eigenvektoren (auf Länge 1).

17. **Vektoren und Matrizen II** (10.12.2008, R. Mahnke)

Wiederholung Eigenwertgleichung. Berechnung von Eigenwerten und Eigenvektoren an Hand eines Beispiels. Siehe Lösungen der Übungsaufgabe Serie 7.

18. **Zusatzveranstaltung: Zufällige Prozesse** (11.12.2008, R. Mahnke)

Der Zufall ist sowohl im täglichen Leben als auch in der Wissenschaft allgegenwärtig. Wahrscheinlichkeitsaussagen sind wichtig. Bekannt sind sie aus der Demographie und der Versicherungsmathematik.

Insbesondere in der Physik spielt der Zufall eine zentrale Rolle. Forschungen zur Physik zufälliger Prozesse sind hochaktuell. Sie reichen von der Quantenphysik bis zur Risikoabschätzung von Finanzprodukten.

Zu diesem Thema erscheint jetzt ein Lehrbuch für Studenten und Dozenten. Die Verfasser sind Mitarbeiter (Reinhard Mahnke) und Gäste (Jevgenijs Kaupužs aus Riga, Ihor Lubashevsky aus Moskau) des Instituts für Physik der Universität Rostock.

Die Buchpräsentation zum Thema *Physik stochastischer Prozesse in Lehre und Forschung* erfolgt am 11.12.2008 um 16.00 Uhr im Großen Hörsaal Physik am Universitätsplatz 3. Die Veranstaltung dauert eine Stunde. Anwendungen, für jedermann von Interesse, betreffen die Physik des Straßenverkehrs.

19. **Vektoren und Matrizen III** (12.12.2008, R. Mahnke)

Analyse des dynamischen Systems, gegeben in Übungsaufgabe 6a. Das Ziel ist die Bestimmung der Zeitentwicklung (Evolution) der Variablen $x(t)$ und $y(t)$. Nach Einführung von Koeffizientenmatrix M und Vektor P kompakte Schreibweise des dynamischen Systems als $dP/dt = M P$.

Formulierung der Eigenwertgleichung. Bestimmung der beiden konjugiert komplexen Eigenwerte $\lambda_1 = -1 + i$ und $\lambda_2 = -1 - i$. Anschließend Berechnung der dazugehörigen komplexen Eigenvektoren P_1 und P_2 und deren Normierung. Bestimmung der Superpositionslösung unter Berücksichtigung der Anfangsbedingung (siehe Serie 8).

20. **Projektarbeit I** (17.12.2008)

21. **Projektarbeit II** (19.12.2008)

22. **Wiederholung** (07.01.2009, R. Mahnke)

Analytische Lösung eines dynamischen Systems, siehe 12.12.2008.

23. **Vektoranalysis I** (09.01.2009, R. Mahnke) Grundbegriffe zum Vektor (z. B. Ortsvektor) und Skalar- bzw. Vektorfeld; Beispiele wie Temperatur- oder Kraftfeld; Einheitsvektoren als Basis; Differentiation (als Richtungsableitung) von Feldern; Gradient eines Skalarfeldes ergibt ein Vektorfeld. Beispiele sind Potential (potentielle Energie und Kraft).

24. **Projektpräsentationen I** (14.01.2009, R. Mahnke)

Thema 2: Johanna Dittrich: *Van der Pol-Oszillator*

Analysiere den Fluss im Zustandsraum für das folgende dynamische System (siehe Aufgabe 6b)

$$\begin{aligned}\frac{dx}{dt} &= x - y - x(x^2 + y^2), \\ \frac{dy}{dt} &= x + y - y(x^2 + y^2),\end{aligned}$$

das in Beziehung zum van der Pol-Oszillator steht.

Thema 3: Robert Bunk: *Die logistische Gleichung: Numerik*

Untersuche mit Hilfe numerischer Methoden die bekannte diskrete Abbildung (logistische Gleichung)

$$x_{n+1} = rx_n(1 - x_n)$$

für den Kontrollparameterbereich $0 < r \leq 4$ und Anfangswerte aus dem Einheitsintervall $0 \leq x_0 \leq 1$.

Ausgefallen (Student nicht erschienen)

Thema 4: Alexander Schmidt: *Die logistische Gleichung: Feigenbaumdiagramm*

Untersuche analytisch die bekannte diskrete Abbildung (logistische Gleichung)

$$x_{n+1} = rx_n(1 - x_n)$$

für den Kontrollparameterbereich $0 < r \leq 4$ und Anfangswerte aus dem Einheitsintervall $0 \leq x_0 \leq 1$ und analysiere das Langzeitverhalten ($n \rightarrow \infty$) bei verschiedenen Parameterwerten r . Diskutiere die Darstellung x über r , bekannt als Feigenbaum-Diagramm.

25. **Vektoranalysis II** (16.01.2009, R. Mahnke) Differentiation von Feldern: Gradient, Divergenz und Rotation; Benutzung des Nablaoperators; Unterscheidung zwischen konservativen und nicht-konservativen (dissipativen) vektorellen (Kraft-)Feldern und deren Darstellung mittels (skalarer) Potentialfunktion.

Beispiel-Aufgabe:

Zeigen Sie, dass das Vektorfeld $\vec{F}(x, y, z)$, gegeben durch

$$\vec{F} = (2x + y) \vec{i} + (x - y^2) \vec{j} + 0 \vec{k},$$

konservativ ist (prüfen Sie, ob $\text{rot } \vec{F} = 0$ gilt) und berechnen Sie danach die Skalarfunktion $\varphi(x, y, z)$ mittels

$$\vec{F} = -\text{grad } \phi.$$

Führen Sie eine sinnvolle Normierung durch.

26. **Entfällt** (21.01.2009, R. Mahnke)
Studienreise Univ. Klausenburg

27. **Projektpräsentationen II** (23.01.2009, R. Mahnke)

Thema 5: Anett Ziehm: *Zufällige Prozesse (Das Zwei-Niveau-System)*

Der Spinzustand (Was ist ein Spin?) hat nur zwei Werte (+ Niveau bzw. $+\hbar/2$) und - Niveau bzw. $-\hbar/2$). Das Umklappen erfolgt zufällig mit den Raten w_{-+} von + nach - und w_{+-} von - nach +. Diese Raten (Anzahl der Umklappprozesse pro Zeit) sind gegeben. Die beiden Zustände sind charakterisiert durch ihre Wahrscheinlichkeiten $p_+(t)$ und $p_-(t)$. Die Zeitentwicklung ist durch das folgende dynamisches System (Mastergleichung) gegeben

$$\begin{aligned} \frac{dp_+}{dt} &= -w_{-+}p_+ + w_{+-}p_- \\ \frac{dp_-}{dt} &= +w_{-+}p_+ - w_{+-}p_- \end{aligned}$$


```

    t+=dt; // Erhöhung der Gesamtzeit
    t1+=dt; // Erhöhung der Zeit im
            // oberen Niveau
    t1_count++; // Erhöhung des oberen
                // Aufenthaltzählers
    cout << t << " 1" << endl; // Ausgabe Zeit und Niveau
}
cout << "# w_{01}          = " << w01          << endl;
            // Ausgabe w01
cout << "# w_{10}          = " << w10          << endl;
            // Ausgabe w10
cout << "# T_{0}          = " << t0          << endl;
            // Ausgabe t0
cout << "# T_{1}          = " << t1          << endl;
            // Ausgabe t1
cout << "# N_{0}          = " << t0_count << endl;
            // Ausgabe t0_count
cout << "# N_{1}          = " << t1_count << endl;
            // Ausgabe t1_count
cout << "# w_{01} / w_{10} = " << w01/w10 << endl;
            // Ausgabe w01/w10
cout << "# T_{1} / T_{0}   = " << t1/t0      << endl;
            // Ausgabe t1/t0
return 0;
}

```

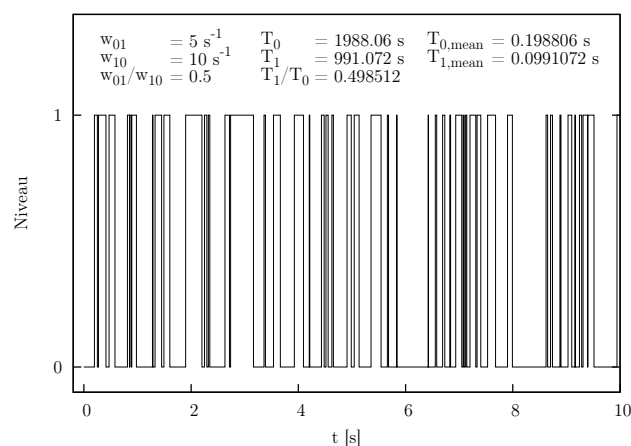


Abbildung 1: Zeitreihe eines 2-Niveau-Systems mit konstanten Übergangsraten

Thema 1: Catharina Traulsen: *Fraktale – Eigenschaften und Beispiele*
 Begriffe wie fraktale Dimension, Selbstähnlichkeit, Skaleninvarianz, Julia Menge, Mandelbrot Iteration, Sierpinski Dreieck, Koch–Kurve bzw. Koch–Schneeflocke, etc
 Fraktale in der Natur (Küstenlinie), fraktale Strukturen in der Biologie (Farne, etc)

Ausgefallen (Studentin nicht erschienen)

28. **Vektoranalysis III** (28.01.2009, R. Mahnke)

Diskussion der Beispiel–Aufgabe vom 16.01.2009. Da die Rotation des Vektorfeldes verschwindet (Wirbelfreiheit), existiert eine skalare Potentialfunktion $\phi = \phi(x, y, z)$. Sie lautet $\phi(x, y) = -xy - x^2 + y^3/3$, wobei als Normierung $\phi(x = 0, y = 0, z = 0) = 0$ gewählt wurde. Grafische Darstellung: Entweder dreidimensionale Funktion $\phi(x, y)$ zeichnen oder zweidimensionale Isolinendarstellung $\phi(x, y) = H$

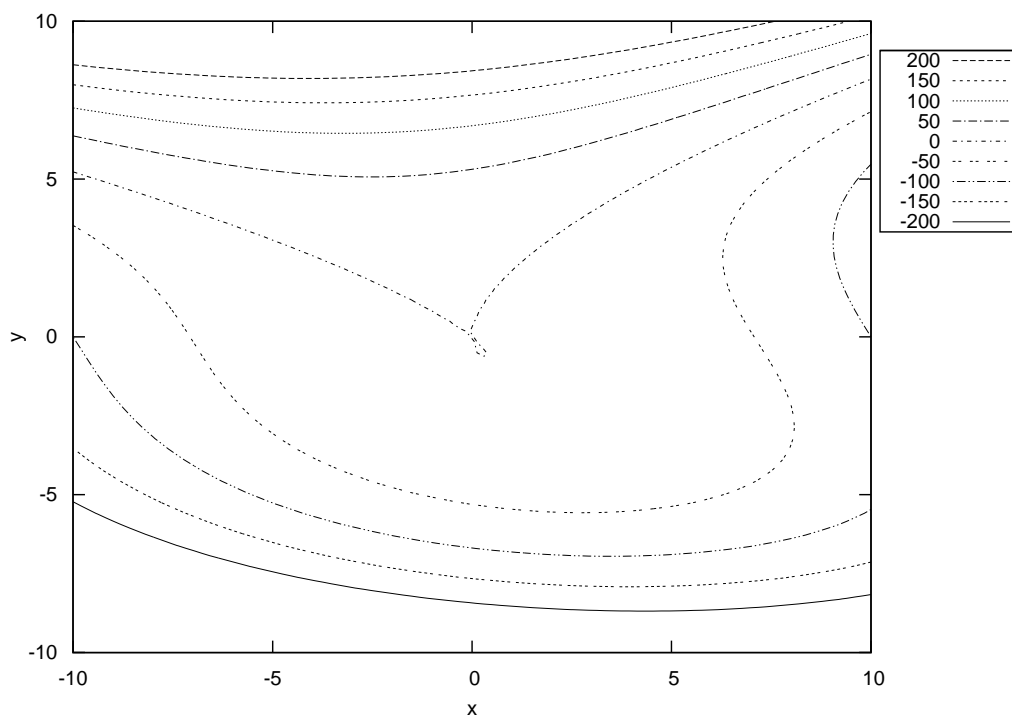


Abbildung 2: Isolinien $\phi(x, y) = H$

29. **Abschluss** (30.01.2009, R. Mahnke)

Diskussion der Inhaltsübersicht. Schlussbemerkungen.

Studentenpräsentationen:

Thema 1 Catharina Traulsen: *Fraktale – Eigenschaften und Beispiele*
Begriffe wie fraktale Dimension, Selbstähnlichkeit, Skaleninvarianz, Julia Menge, Mandelbrot Iteration, Sierpinski Dreieck, Koch–Kurve bzw. Koch–Schneeflocke, etc
Fraktale in der Natur (Küstenlinie), fraktale Strukturen in der Biologie (Farne, etc)

Thema 2 Johanna Dittrich: *Van der Pol–Oszillator*
Analysiere den Fluss im Zustandsraum für das folgende dynamische System (siehe Aufgabe 6b)

$$\begin{aligned}\frac{dx}{dt} &= x - y - x(x^2 + y^2) , \\ \frac{dy}{dt} &= x + y - y(x^2 + y^2) ,\end{aligned}$$

das in Beziehung zum van der Pol–Oszillator steht.

Literaturhinweis:

Kapitel 6 in R. Mahnke, *Nichtlineare Physik in Aufgaben*, Teubner, Stuttgart, 1994

Thema 3 Robert Bunk: *Die logistische Gleichung: Numerik*
Untersuche mit Hilfe numerischer Methoden die bekannte diskrete Abbildung (logistische Gleichung)

$$x_{n+1} = rx_n(1 - x_n)$$

für den Kontrollparameterbereich $0 < r \leq 4$ und Anfangswerte aus dem Einheitsintervall $0 \leq x_0 \leq 1$.

Thema 4 Alexander Schmidt: *Die logistische Gleichung: Feigenbaumdiagramm*
Untersuche analytisch die bekannte diskrete Abbildung (logistische Gleichung)

$$x_{n+1} = rx_n(1 - x_n)$$

für den Kontrollparameterbereich $0 < r \leq 4$ und Anfangswerte aus dem Einheitsintervall $0 \leq x_0 \leq 1$ und analysiere das Langzeitverhalten ($n \rightarrow \infty$) bei verschiedenen Parameterwerten r . Diskutiere die Darstellung x über r , bekannt als Feigenbaum–Diagramm.

Literaturhinweis:

Kapitel 21 in J. Schmelzer u. a., *Aufgabensammlung zur klassischen theoretischen Physik*, Aula–Verlag, Wiesbaden, 1994

Thema 5 Anett Ziehm: *Zufällige Prozesse (Das Zwei-Niveau-System)*

Der Spinzustand (Was ist ein Spin?) hat nur zwei Werte (+ Niveau bzw. $+\hbar/2$) und $-$ Niveau bzw. $-\hbar/2$). Das Umklappen erfolgt zufällig mit den Raten w_{-+} von $+$ nach $-$ und w_{+-} von $-$ nach $+$. Diese Raten (Anzahl der Umklappprozesse pro Zeit) sind gegeben. Die beiden Zustände sind charakterisiert durch ihre Wahrscheinlichkeiten $p_+(t)$ und $p_-(t)$. Die Zeitentwicklung ist durch das folgende dynamisches System (Mastergleichung) gegeben

$$\begin{aligned}\frac{dp_+}{dt} &= -w_{-+}p_+ + w_{+-}p_- \\ \frac{dp_-}{dt} &= +w_{-+}p_+ - w_{+-}p_-\end{aligned}$$

zusammen mit den Anfangsbedingungen $p_+(0)$ und $p_-(0)$.

Berechnen und diskutieren Sie die zeitabhängigen Lösungen $p_+(t)$ und $p_-(t)$.

Literaturhinweis:

Kapitel 3.6 in R. Mahnke u. a., *Physics of Stochastic Processes*, Wiley-VCH, Weinheim, 2008

Mathematische Hilfsmittel

– Serie 1 –

Aufgabe 1a

$$z = \frac{2i - 1}{i - 2} = \frac{2i - 1}{i - 2} \cdot \frac{i + 2}{i + 2} = \frac{-4 + 3i}{-5} = \frac{4}{5} - \frac{3}{5}i$$
$$\operatorname{Re}(z) = \frac{4}{5}; \operatorname{Im}(z) = -\frac{3}{5}$$

Aufgabe 1b

$$z = \frac{(1 + i)^4}{(1 - i)^4} = \frac{(1 + i)^2 \cdot (1 + i)^2}{(1 - i)^2 \cdot (1 - i)^2} = \frac{2i \cdot 2i}{-2i \cdot (-2i)} = \frac{-4}{-4} = 1$$

Polardarstellung:

$$z = \cos 0 + i \sin 0$$
$$\operatorname{Re}(z) = 1; \operatorname{Im}(z) = 0$$

Mathematische Hilfsmittel

– Serie 3 –

Aufgabe 3a

Der Differentialquotient (1. Ableitung, Anstieg) wird als Differenzenquotient (Steigungsdreieck) genähert. Es gilt

$$f'(x_n) = \left. \frac{f(x)}{dx} \right|_{x=x_n} \approx \frac{f(x_{n+1}) - f(x_n)}{x_{n+1} - x_n} = \frac{0 - f(x_n)}{x_{n+1} - x_n}$$

und somit wegen

$$f'(x_n) = \frac{0 - f(x_n)}{x_{n+1} - x_n}$$

folgt die Newton-Iterationsformel

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}.$$

Aufgabe 3d

Für das Newton-Verfahren in der komplexen Ebene gilt die gleiche Iterationsformel wie für reelle Funktionen

$$z_{n+1} = F(z_n) \quad \text{mit} \quad F(z) = z - \frac{f(z)}{f'(z)}.$$

Wegen $f(z) = z^3 - 1$ und $f'(z) = 3z^2$ gilt somit

$$F(z) = z - \frac{z^3 - 1}{3z^2} = \frac{2}{3}z + \frac{1}{3}z^{-2}.$$

Einsetzen von $z = x + iy$ liefert nach Erweiterung mit dem konjugiert komplexen Nenner im zweiten Summanden

$$F(z) = \frac{2}{3}(x + iy) + \frac{1}{3} \frac{1}{x^2 + i2xy - y^2}$$

das Resultat

$$F(z) = \frac{2}{3}(x + iy) + \frac{1}{3} \frac{(x - iy)^2}{(x^2 + y^2)^2}.$$

Die Iterationsformel für den Realteil lautet

$$F_{Re}(x, y) = \frac{2}{3}x + \frac{1}{3} \frac{x^2 - y^2}{(x^2 + y^2)^2},$$

die Iterationsformel für den Imaginärteil lautet

$$F_{Im}(x, y) = \frac{2}{3}y - \frac{2}{3} \frac{xy}{(x^2 + y^2)^2}.$$

Anwendung eines Computerprogramms auf Basis der Newton-Iteration zur numerischen Berechnung der Nullstellen und deren Einzugsgebiete. Frustration im Koordinatenursprung (Dreieckspunkt, Buridans – Esel – Problem), fraktale Ränder der Einzugsgebiete, alle Dreieckspunkte (Punkte, die zu keiner Nullstelle konvergieren, sondern divergieren) bilden ein Fraktal, genannt Julia-Menge.

Aufgabe 3e

Der Koordinatenursprung $z = 0$ gehört zur Julia-Menge. Das ist die Menge aller (Dreiecks-)Punkte, die zu keinem Fixpunkt konvergieren, sondern ins Unendliche divergieren, d. h. $F(z = 0) \rightarrow \infty$.

Gesucht ist der Vorläufer dieses Punktes ($x = y = 0$) auf der negativen reellen Achse. Die Iterationsformel für den Realteil auf der reellen Achse lautet

$$F_{Re}(x, y = 0) = \frac{2}{3}x + \frac{1}{3} \frac{x^2}{(x^2)^2}.$$

Somit gilt (bei einem Schritt)

$$x_1 = F_{Re}(x_0, y = 0) = \frac{2}{3}x_0 + \frac{1}{3} \frac{1}{x_0^2} = \frac{2x_0^3 + 1}{3x_0^2}.$$

Da wir genau das x_0 suchen, dass zu $x_1 = 0$ führt, gilt

$$0 = \frac{2x_0^3 + 1}{3x_0^2}$$

mit der Lösung

$$x_0 = -\frac{1}{\sqrt[3]{2}} \approx -0.7937.$$

Mathematische Hilfsmittel

– Serie 4 –

$$z^2 + (1 + i)z - 2(1 - i) = 0$$

Nach dem Satz von VIETA gilt:

$$\begin{aligned}q &= z_0 \cdot z_1 \\p &= -(z_0 + z_1)\end{aligned}$$

Also ergibt sich für die obrige quadratische Gleichung.

$$\begin{aligned}q &= -2(1 - i) \\p &= -(1 + i) = -1 - i\end{aligned}$$

Für z_0 und z_1 ergibt sich dann:

$$\begin{aligned}z_1 &= -2 \\z_2 &= 1 - i\end{aligned}$$

Mathematische Hilfsmittel

– Serie 6 –

$$\frac{d}{dt} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

Wir bestimmen die Eigenwerte der Matrix:

$$\det \begin{pmatrix} -1 - \lambda & 1 \\ -1 & -1 - \lambda \end{pmatrix} = (-1 - \lambda)^2 + 1 = \lambda^2 + 2\lambda + 2$$
$$\lambda^2 + 2\lambda + 2 = 0; \quad \lambda_{1,2} = -1 \pm i$$

Wir bestimmen den normierten Eigenvektor \vec{v}_1 zum Eigenwert λ_1 :

$$\begin{pmatrix} -i & 1 \\ -1 & -i \end{pmatrix} \vec{v}_1 = \vec{0}; \quad \vec{v}_1 = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} i \\ -1 \end{pmatrix}$$

Wir bestimmen den normierten Eigenvektor \vec{v}_2 zum Eigenwert λ_2 :

$$\begin{pmatrix} i & 1 \\ -1 & i \end{pmatrix} \vec{v}_2 = \vec{0}; \quad \vec{v}_2 = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} -i \\ -1 \end{pmatrix}$$

Damit ergibt sich als Lösung:

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = e^{(-1+i)t} \begin{pmatrix} i \\ -1 \end{pmatrix}$$
$$= e^{-t}(\cos t + i \sin t) \begin{pmatrix} i \\ -1 \end{pmatrix}$$
$$= e^{-t} \begin{pmatrix} -\sin x \\ -\cos x \end{pmatrix} + i e^{-t} \begin{pmatrix} \cos x \\ -\sin x \end{pmatrix}$$

Als Fundamentalsystem ergibt sich dann:

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix} = e^{-t} \begin{pmatrix} -\sin x \\ -\cos x \end{pmatrix}$$
$$\begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \end{pmatrix} = e^{-t} \begin{pmatrix} \cos x \\ -\sin x \end{pmatrix}$$

Unter Betrachtung der Anfangsbedingung ergibt sich:

$$x(t) = y_0 e^{-t} \sin t + x_0 e^{-t} \cos t$$
$$y(t) = y_0 e^{-t} \cos t - x_0 e^{-t} \sin t$$