Mathematische Hilfsmittel für Lehramt und Beifach

PD Dr. Reinhard Mahnke
Institut für Physik

Lehrveranstaltung Nr. 12557
(2 SWS V + 2 SWS Ü)

Mittwoch 7.30 bis 9.00 Uhr, Konferenzraum Wismarsche Str. 44
Freitag 7.30 bis 9.00 Uhr, Konferenzraum Wismarsche Str. 44
Wintersemester 2009/10

Einschreibeliste:

1. Rayk Wilhelm, LA H+R Mathe, Physik, Geschichte
2. Nikita Gerasimow, LA H+R, Sport, Physik, Englisch
3. Dominique Siegert, LA H+R, Mathematik, Religion, Astronomie
4. Matthias Kapell, LA H+R, Mathematik, Physik, Religion
5. Oliver Schade, LA H+R, Deutsch, Physik, Religion

Punkteliste HA:

Name	1,8P	2,6P	Vort.	4,4P	5,2P	6,6P	7,6P	8
Rayk Wilhelm	0	1	–	2	–	–	1	+
Nikita Gerasimow	–	1	+	(2)	–	–	–	–
Dominique Siegert	1	1	+	1	1	2	–	–
Matthias Kapell	7	2	+	2	0	2	1	+
Oliver Schade	8	2	+	2	2	2	4	+

Inhaltsangabe:

1. **Komplexe Zahlen I** (14.10.2009, R. Mahnke)
Quadratische Gleichung $x^2 + px + q = 0$ (Variable x, Parameter p, q) zur Nullstellenberechnung, Einschränkung im Raum der rellen Zahlen, Einführung und Definition der komplexen Zahlen $z = x + iy$ und ihre Darstellung in der Gaußschen Zahlenebene, Imaginäre Einheit i mit $i^2 = -1$, Grundrechenarten (Addition, Subtraktion, Multiplikation) wie üblich, bei Division Erweiterung mit der zu z konjugiert komplexen Zahl $\overline{z} = x - iy$, Polardarstellung mit Hilfe trigonometrischer Funktionen $z = r(\cos\alpha + i\sin\alpha)$, Hin– und Rücktransformation zwischen karthesischen (x, y) und polaren Koordinaten (r, α).

2. **Komplexe Zahlen II** (16.10.2009, R. Mahnke)
Neue (dritte) Darstellung einer komplexen Zahl z mittels Euler–Formel, z. B. $z = 1 + i = \sqrt{2}\,(\cos(\pi/4) + i\sin(\pi/4)) = \sqrt{2}\,e^{i\pi/4}$, einfache Berechnung von Potenzen z^n durch Euler–Darstellung, 2π–Periodizität der komplexen Exponentialfunktion (analog $\sin x$ und $\cos x$), Ausblick auf die Gleichung $z^n - 1 = 0$.

3. **Komplexe Zahlen III** (21.10.2009, R. Mahnke)
Die Übungsaufgaben *Serie 1* (Abgabe am 21.10.09) wurden besprochen.

   (1a) Berechnen Sie Real– und Imaginärteil:
$$z = \frac{2i - 1}{i - 2} \; .$$

   (1b) Werten Sie auf einfache Weise aus (Polardarstellung) und berechnen Sie Real– und Imaginärteil:
$$z = \frac{(1 + i)^4}{(1 - i)^4} \; .$$

   (1c) Lösen Sie die quadratische Gleichung
$$z^2 - 2i = 0 \; .$$

   Hinweis: Unter Benutzung von $z = x + iy$ erhält man ein Gleichungssystem aus zwei Gleichungen für die beiden Unbekannten $x = \mathrm{Re}(z)$ und $y = \mathrm{Im}(z)$. Es gibt (genau) zwei Lösungen $z_{1,2} = \pm\sqrt{2i} = (1 + i, -1 - i)$, die mittels Probe überprüft werden sollten.

4. **Komplexe Zahlen IV** (23.10.2009, R. Mahnke)
Wiederholung komplexe Zahlen (drei Darstellungsarten $z = x + iy = r(\cos\alpha + i\sin\alpha) = r\exp(i\alpha)$). Diskussion über komplexe Funktionen $w = f(z)$ (Beispiel: komplexe Exponentialfunktion) und die Nullstellenberechnung $f(z) = 0$.

5. **Komplexe Zahlen V** (28.10.2009, R. Mahnke)
Die *Übungsaufgaben Serie 2* (Abgabe zum 28.10.09) wurden besprochen.

   (2a) Was verstehen Sie unter den Nullstellen einer komplexen Funktion $w = f(z)$?

   (2b) Beispiel: Lösung der folgenden quadratischen Gleichung

$$z^2 + (1+i)\,z - 2(1-i) = 0\ .$$

   Angabe der Nullstellen in der Form $z_{1,2} = x_{1,2} + i\,y_{1,2}$. Diskussion verschiedener Lösungsvarianten mittels Trennung in Real– und Imaginärteil oder Transformation in Polarkoordinaten. Hilfreich ist die Anwendung des Satzes von Vieta:

$$z_1 + z_2 = -p\ ,$$
$$z_1 \cdot z_2 = q\ .$$

   Wegen $p = 1 + i$ und $q = -2 + 2i$ lauten somit die Nullstellen

$$z_1 = -2\ ,$$
$$z_2 = 1 - i\ .$$

6. **Selbststudium** (30.10.2009, R. Mahnke)
Numerik: Newton–Iteration zur Nullstellenberechnung
(Newton–Verfahren)

Themenstellungen Serie 3 (Vorträge am 04.11.09)

   (3a) Leiten Sie die Newton–Iteration zur Berechnung von Nullstellen reeller Funktionen $F(x)$ her. Erläutern Sie anhand einer Grafik.

   (3b) Wenden Sie die Newton–Iteration zur Berechnung von Nullstellen am Beispiel der reellen Funktion $F(x) = 8x^2 - 2$ an.

   (3c) Übertragen Sie das Newton–Verfahren in die komplexe Ebene zur Nullstellenberechnung einer komplexen Funktion $F(z)$.

(3d) Diskutieren Sie, wie Sie die Newton–Iteration beim Vorhandensein von mehreren Nullstellen anwenden. Die kubische Gleichung $F(z) = z^3 - 1 = 0$ liefert bekannterweise drei Nullstellen auf dem Einheitskreis mittels $z_k = \exp\{i\,(2\pi/3)\,k\}$ zu $z_0 = 1$ und $z_{1,2} = -1/2 \pm i\sqrt{3}/2$.

7. **Newton–Verfahren I** (04.11.2009, R. Mahnke)
   Das Newton–Iterationsverfahren wurde in vier Studenten–Vorträgen behandelt.

   Die Newton–Iteration zur Berechnung von Nullstellen reeller Funktionen $f(x)$ erfolgt mittels $x_{m+1} = x_m - F(x_m)/F'(x_m)$.

   Der Algorithmus im Sinne eines Struktogramms (Flussdiagramm) als Ablaufplan eines Computerprogramms wurde vorgestellt.

   Am Beispiel $F(x) = 8x^2 - 2$ mit den Nullstellen $x_{1/2} = \pm\,0.5$ werden die Einzugsgebiete und ihre Begrenzungen (Separartrix $x_{sx} = 0$) diskutiert.

   Übertragung des Newton–Numerik in die komplexe Ebene zur Nullstellenberechnung einer komplexen Funktion $F(z)$ am Beispiel der kubischen Funktion $F(z) = z^3 - 1$.

8. **Newton–Verfahren II** (06.11.2009, R. Mahnke)
   Newton–Verfahren in der komplexen Ebene. Für das Beispiel der komplexen kubischen Funktion $F(z) = z^3 - 1$ werden die Newton–Iterationsformeln getrennt nach Real– und Imaginärteil ermittelt. Speziell die Iteration auf der rellen Achse ($y = 0$) wird betrachtet. Welche Punkte ($x_i < 0, y = 0$) konvergieren auf den divergenten Punkt ($x = 0, y = 0$)? Berechnen Sie die Anfangsbedingung ($x_0 < 0, y_0 = 0$), die nach genau einer Iteration auf den Koordinatenursprung führt.

9. **Vektoren (Algebra)** (11.11.2009, R. Mahnke)
   Physikalische Größen sind entweder Skalare oder Vektoren, z. B. Ortsvektor $\vec{r} = x\vec{e_x} + y\vec{e_y} + z\vec{e_z}$ in Komponentendarstellung. Elementare Rechenregeln der Addition und Subtraktion von Vektoren. Speziell: Einheitsvektor und Nullvektor. Verknüpfung von Vektoren: (a) Skalarprodukt (inneres Produkt $\vec{a} \cdot \vec{b} = c$) und (b) Vektorprodukt (äußeres Produkt, Kreuzprodukt $\vec{a} \times \vec{b} = \vec{c}$). Basisvektoren sind linear unabhängig. Verweis auf vektorwertige Funktionen, z. B. zeitlich veränderlicher Ortsvektor als Raumkurve $\vec{r}(t)$.

10. **Vektoren (Analysis)** (13.11.2009, R. Mahnke)
Darstellung der Vektorfunktion (Vektorfeld) $\vec{f}(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ innerhalb einer Basis (Komponentendarstellung). Beispiele für Skalar- und Vektorfelder. Differentiation von Vektorfeldern (partielle Ableitung ∂).

11. **Hausaufgaben/Selbststudium** (18.11.2009, R. Mahnke)

Themenstellungen Serie 4 (Abgabe am 18.11.09)

(4a) Berechnen Sie für die drei Vektoren $\vec{a} = (-1, 2, -3)$, $\vec{b} = (3, -1, 5)$ und $\vec{c} = (-1, 0, 2)$ die folgenden Ausdrücke:
$\vec{a} \cdot (\vec{b} \times \vec{c}) \quad ,$
$(\vec{a} \times \vec{b}) \cdot \vec{c} \quad ,$
$|(\vec{a} \times \vec{b}) \times \vec{c}| \quad ,$
$|\vec{a} \times (\vec{b} \times \vec{c})| \quad ,$
$(\vec{a} \times \vec{b}) \times (\vec{b} \times \vec{c})| \quad ,$
$|(\vec{a} \times \vec{b})(\vec{b} \cdot \vec{c})| \quad .$

(4b) Was versteht man unter einem System von Basisvektoren? Wann heißen drei dieser Vektoren linear unabhängig?

12. **Skalar– und Vektorfelder I** (20.11.2009, R. Mahnke)
Begriff des Gradienten grad ϕ: Man ordnet einer vorgegeben Skalarfunktion eine Vektorfunktion zu, genannt Richtungsableitung. Der Gradientenvektor steht senkrecht auf der Tangentialebene $\phi = \text{const}$. Beispiele sind Potential (potentielle Energie) und Kraft.
Begriff der Divergenz div $\vec{f}$: Man ordnet einem Vektorfeld eine skalare Funktion zu, genannt Quellstärke. Beispiel: $\operatorname{div} \vec{r} = 3$.
Verweis auf den Nablaoperator.

13. **Skalar– und Vektorfelder II** (25.11.2009, R. Mahnke)
Begriff der Rotation rot $\vec{f}$: Man ordnet einem Vektorfeld eine neue Vektorfunktion zu, genannt Wirbelstärke.

Themenstellungen Serie 5 (Abgabe am 27.11.09)

(5) Zeigen Sie, dass das Vektorfeld (Kraft) $\vec{F}(x, y, z)$, gegeben durch

$$\vec{F} = (2xy + z^3)\,\vec{i} + (x^2 + 2y)\,\vec{j} + (3xz^2 - 2)\,\vec{k} \ ,$$

konservativ ist (prüfen Sie, ob rot $\vec{F} = 0$ gilt) und berechnen Sie anschliessend die Skalarfunktion (potentielle Energie) $\varphi(x, y, z)$ mittels

$$\vec{F} = -\operatorname{grad}\varphi \; .$$

Führen Sie eine sinnvolle Normierung durch.

Skizzieren Sie sowohl das Vektorfeld $\vec{F}(x, y, z)$ (durch Feldvektoren) als auch das Skalarfeld $\varphi(x, y, z)$ (durch Äquipotentialkurven).

14. **Skalar– und Vektorfelder III** (27.11.2009, R. Mahnke)
Berechnung des zum Vektorfeld $\vec{F}$ (Aufgabe 5) gehörenden Skalarfeldes φ mittels partieller Integration zu

$$\varphi(x, y, z) = -x^2 y - xz^3 - y^2 + 2z + C \; .$$

15. **Integralrechnung I** (02.12.2009, R. Mahnke)
Wiederholung: Berechnung des Gradientenvektors von Skalarfunktionen, u. z.

$$\operatorname{grad}(\vec{a} \cdot \vec{r}) \quad ; \quad \operatorname{grad} r \quad ; \quad \operatorname{grad} f(r) \; .$$

Erweiterung des Integralbegriffs durch Integration von Vektorfunktionen entlang einer Kurve (Kurvenintegrale). Erläuterung des Begriffs des Kurvenintegrals anhand der zu verrichtenden Arbeit an einem Teilchen, das sich entlang einer Bahn in einem Vektorfeld (Kraftfeld) bewegt. Diskussion der Wegunabhängigkeit des Kurvenintegrals bei wirbelfreien Feldern.

16. **Integralrechnung II** (04.12.2009, R. Mahnke)
Wiederholung des Begriffs des Kurvenintegrals und Vorbereitungen zur Berechnung von Kurvenintegralen an Beispielen (siehe Themenstellungen Serie 6).

17. **Integralrechnung III** (09.12.2009, R. Mahnke)
Selbststudium und Prüfungsvorbereitung.

Themenstellungen Serie 6 (Abgabe am 11.12.09)

(6a) Prüfen Sie, ob das Vektorfeld $\vec{A}(x, y, z)$, gegeben durch

$$\vec{A} = 2xy\,\vec{i} + y^2\,\vec{j} + 0\,\vec{k} \; ,$$

wirbelfrei ist? Zeichnen Sie sowohl $\vec{A}$ als auch rot $\vec{A}$.
Berechnen Sie anschliessend das Kurvenintegral

$$I_i = \int_{Weg_i(A,E)} \vec{A} \cdot d\vec{r}$$

entlang folgender zwei Kurven in der $x - y$ - Ebene:

Weg $K_1(A, E) : x = t, y = 0, 0 \leq t \leq 1$ und $x = 1, y = t-1, 1 \leq t \leq 2$

sowie

$$\text{Weg } K_2(A, E) : x = t, y = t, 0 \leq t \leq 1 \; .$$

(6b) Betrachten Sie das Kurvenintegral $I = \int_C \vec{A} \cdot d\vec{r}$ für das Vektorfeld

$$\vec{A}(x, y, z) = A_x(x, y, z)\; \vec{i} + A_y(x, y, z)\; \vec{j} + A_z(x, y, z)\; \vec{k} \; ,$$

Die Bahnkurve C sei in Parameterdarstellung (Parameter t, kann Zeit sein) gegeben als

$$\vec{r}(t) = x(t)\; \vec{i} + y(t)\; \vec{j} + z(t)\; \vec{k} \; ,$$

Zeigen Sie, dass das Kurvenintegral I sich als Integral über einen Parameter t wie folgt schreiben lässt

$$I = \int_C \vec{A} \cdot d\vec{r} = \int_{t_1}^{t_2} \left(A_x(t)\frac{dx(t)}{dt} + A_y(t)\frac{dy(t)}{dt} + A_z(t)\frac{dz(t)}{dt} \right) dt \; .$$

(6c) Wenden Sie auf das Vektorfeld

$$\vec{A} = (3x^2 - 6yz)\; \vec{i} + (2y + 3xz)\; \vec{j} + (1 - 4xyz^2)\; \vec{k}$$

und die Bahnkurve

$$\vec{r}(t) = t\; \vec{i} + t^2\; \vec{j} + t^3\; \vec{k}$$

die Ergebnisse von Aufgabe (b) an und berechnen das Kurvenintegral in den Grenzen $t_1 = 0$ und $t_2 = 2$.

18. **Integralrechnung IV** (11.12.2009, R. Mahnke)
Diskussion der Übungsaufgaben Serie 6, insbesondere: Was ist ein Kurvenintegral? Wann ist ein Kurvenintegral wegunabhängig? Wie wird ein zweidimensionales Kurvenintegral berechnet?

19. **Differentialrechnung** (16.12.2009, R. Mahnke)
Definition der ersten Ableitung $f'(x)$ als Differentialquotienten $df(x)/dx$ und Vergleich mit dem Differenzenquotienten $\Delta f(x)/\Delta x$. Berechnung der ersten Ableitung am Beispiel des Kugelvolumens $V(r) = (4\pi/3)r^3$ und Vergleich mit dem Differenzenquotienten. Gewöhnliche (d) und partielle (∂) Ableitungen (bei Funktionen mehrerer Variablen). Zweite und höhere Ableitungen. Reine und gemischte (partielle) Ableitungen. Totales Differential $df(x, y, z)$ ein– und mehrdimensionaler Funktionen. Beipiel: Kugelvolumen $V(r)$, Unterschied zwischen Differenz ΔV und Differential dV.

20. **Differentialgleichung I** (18.12.2009, R. Mahnke)
Einführung des Begriffs der gewöhnlichen Differentialgleichung 2. Ordnung am Beispiel der Newtonschen Bewegungsgleichung $m\, d^2x(t)/dt^2 = F(x, dx/dt)$. Erweiterung auf Differentialgleichung (Dgl.) n–ter Ordnung. Es gilt der Satz: Die allgemeine Lösung einer Dgl. n-ter Ordnung enthält n Integrationskonstanten. Diskussion des Anfangswertproblems, d. h. Lösung einer Differentialgleichung unter Berücksichtigung von Anfangsbedingungen. Hinweis auf partielle Differentialgleichungen (wichtig in der Quantenphysik, siehe Schrödinger Gleichung oder Fokker–Planck Gleichung bei zufälligen Prozessen).

Themenstellungen Serie 7 (Abgabe am 06.01.10)

(7a) Lösen Sie das folgende Anfangswertproblem (mit konstanter Kraft $F_0 \geq 0$)

$$\begin{aligned} m\,\frac{d^2x(t)}{dt^2} &= F_0 \\ x(t=0) &= x_0 \\ \frac{dx}{dt}(t=0) &= v_0 \end{aligned}$$

und zeichnen die Lösung $x(t)$ für zwei unterschiedliche Fälle:
(1) $F_0 > 0$ und (2) $F_0 = 0$.

(7b) Lösen Sie das folgende Anfangswertproblem (mit zeitabhängiger Beschleunigung $a(t) = g\exp\{-kt\}$)

$$\begin{aligned} \frac{d^2x(t)}{dt^2} &= a(t) \\ x(t=0) &= x_0 \\ \frac{dx}{dt}(t=0) &= v_0 \end{aligned}$$

und zeichnen die Lösung als Geschwindigkeits-Zeit-Kurve $v = v(t)$ und Orts-Zeit-Funktion $x(t)$.

(7c) Wie kann die folgende Differentialgleichung

$$\frac{d^2x(t)}{dt^2} = a(x(t))$$

gelöst werden? Beschreiben Sie die Methode 'Trennung der Variablen'.

21. **Differentialgleichung II** (06.01.2010, R. Mahnke)
Wiederholung des Begriffs Differentialgleichung; Verweis auf (Newton–) Bewegungsgleichung als Anfangswertproblem; Trennung der Variablen als einfachste analytische Lösungsmethode. Klassifikation von Differentialgleichungen (linear/nichtlinear und homogen/inhomogen); System von gekoppelten Differentialgleichungen (Matrix–Schreibweise); Superposition von homogener und partikulärer Lösung bei inhomogener Differentialgleichung. Bestimmung der partikulären Lösung durch Variation der Konstanten.

22. **Differentialgleichung III** (08.01.2010, R. Mahnke)
Diskussion der Übungsaufgaben Serie 7, insbesondere Differentialgleichungen mit konstanter Kraft ($7a$) und zeitabhängiger exponentiell fallender Kraft ($7b$). Bestimmung der Lösungen beider Anfangswertprobleme mittels Integration. Hinweis auf die Lösungsmethode 'Trennung der Variablen' zur Behandlung des Problems einer Differentialgleichung mit ortsabhängiger Kraft ($7c$).

Themenstellungen Serie 8 (Abgabe am 13.01.10)

(8) Lösen Sie die folgende Differentialgleichung

$$m\frac{d^2x}{dt^2} = -kx$$

unter Berücksichtigung der typischen Anfangswerte x_0 und v_0.

23. **Differentialgleichung IV** (13.01.2010, R. Mahnke)
Diskussion der Übungsaufgabe Serie 8. Es handelt sich um die bekannte Schwingungsdifferentialgleichung $\frac{d^2x}{dt^2} = -\omega_0^2 x$, wobei die Kreisfrequenz als $\omega_0^2 = k/m$ gegeben ist. Nach Substitution $dx/dt = v$ kann die Differentialgleichung $v\frac{d2x}{dx} = -\omega_0^2 x$ mittels Variablentrennung gelöst

werden. Im zweiten Schritt wird diese Lösungsfunktion $v = v(x)$ in die Differentialgleichung $dx/dt = v$ eingesetzt. Die Integration liefert $t = t(x)$ und nach Umkehrung folgt das Weg–Zeit–Gesetz $x = x(t)$ in der Form $x(t) = A \sin(\omega_0 t + B)$. Die beiden Integrationskonstanten folgen aus den Anfangsbedingungen.

24. **Differentialgleichung V** (15.01.2010, R. Mahnke)
Übung zu den gewöhnlichen Differentialgleichungen, insbesondere zur o. g. Gleichung des Federschwingers. Nachweis, dass die Lösungsfunktion tatsächlich die Differentialgleichung erfüllt, d. h. Probe durchführen. Die Schwingungsdifferentialgleichung mit Anfangsbedingungen hat genau eine Lösung, die in verschiedenen Schreibweisen (reele oder komplexe Formulierung) darstellbar ist.

25. **Koordinatentransformationen I** (20.01.2010, R. Mahnke)
Wechsel des Koordinatensystems als Punkttransformation (z. B. zweidimensionale kartesische Korrdinaten in Polarkoordinaten). Diese allgemeine d-dimensionale Variablen-Transformation ist fast immer lokal umkehrbar und wird über eine sog. Funktionalmatrix beschrieben. Die Determinante dieser Matrix (Funktionaldeterminante) ist bei der Berechnung von Volumenintegralen zu berücksichtigen, beispielsweise zur Ermittlung des Kugelvolumens als dreidimensionales Integral in Kugelkoordinaten.

26. **Selbststudium** (22.01.2010)
Anfertigung einer kurzen Zusammenfassung der Lehrveranstaltung und Benennung der Schwerpunkte (max. zwei Seiten)

27. **Koordinatentransformationen II** (27.01.2010, R. Mahnke)
Wiederholung der Integration in Kugelkoordinaten, insbesondere Festlegung der Integrationsgrenzen bei den beiden Winkel–Koordinaten. Übergang von der Punkttransformation $(x, y) \Longrightarrow (r, \varphi)$ zu zeitabhängigen Koordinaten $(x(t), y(t)) \Longrightarrow (r(t), \varphi(t))$. Transformation des gekoppelten Differentialgleichungssystems $dx/dt = -x + y \quad ; \quad dy/dt = -x - y$ in Polarkoordinatenschreibweise $dr/dt = -r \quad ; \quad d\varphi/dt = -t$ (zwei entkoppelte Gleichungen). Bestimmung der Lösungen $r(t)$ and $\varphi(t)$, danach Rücktransformation zu $x(t)$ und $y(t)$.

28. **Zusammenfassung** (29.01.2010, R. Mahnke)
Matrizenschreibweise und Berechnung von Eigenwerten aus einer Eigenwertgleichung. Diskussion der Schwerpunkte der Lehrveranstaltung auf Basis der von Herrn Rayk Wilhelm angefertigten Zusammenfassung. Schluss der Lehrveranstaltung.