
Stochastische Prozesse in der Physik

Wintersemester 2014/15

Priv.-Doz. Dr. Reinhard Mahnke
Institut für Physik

Lehrveranstaltung Nr. 12637
(2 SWS V + 2 SWS Ü)
im Rahmen des Bachelor–Studiengangs *Physik*

V: Montag 15.15 bis 16.45 Uhr, Konferenzraum Wismarsche Str. 44

Ü: Montag 17.00 bis 18.30 Uhr, Konferenzraum Wismarsche Str. 44

Übungsleiter: MSc. Martins Brics

This is a joint lecture with the International Study Programme
Master of Science in Physics at the Institute of Physics.

In addition, everyone from other faculties who likes to learn model driven
approaches rather than purely statistical ones is welcome.

Die Lehrveranstaltung begann mit der ersten Vorlesung am
Montag, d. 13.10.2014 um 15.15 Uhr im Seminarraum
Wismarsche Str. 44

The Importance of Being Noisy – Stochasticity in Science

Why stochastic tools? When you asked alumni graduated from European universities moving into nonacademic jobs in society and industry what they actually need in their business, you found that most of them did stochastic things like time series analysis, data processing etc., but that had never appeared in detail in university courses.

Aim The general aim is to provide stochastic tools for understanding of random events in many beautiful applications of different disciplines ranging from econophysics up to sociology which can be used multidisciplinary.

State of the art General problem under consideration is the theoretical modeling of complex systems, i. e. many-particle systems with nondeterministic behavior. In contrast to established classical deterministic approach based on trajectories we develop and investigate probabilistic dynamics by stochastic tools such as stochastic differential equation, Fokker-Planck and master equation to get probability density distribution. The stochastic apparatus provides more understandable and exact background for describing complex systems. The idea goes back to Einstein's work on Brownian motion in 1905 which explains diffusion process as fluctuation problem by Gaussian law as a special case of Fokker-Planck equation.

Textbooks

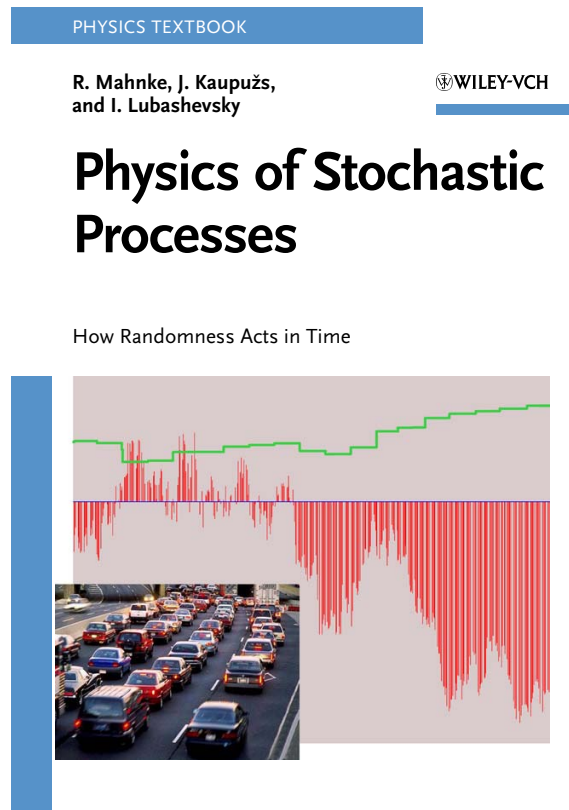


Fig. 1: R. Mahnke, J. Kaupužs and I. Lubashevsky: *Physics of Stochastic Processes*, Wiley-VCH, Weinheim, 2009.

Literatur:

- C. W. Gardiner: *Handbook of Stochastic Methods*, Springer, 2004
- V. S. Anishchenko et. al: *Nonlinear Dynamics of Chaotic and Stochastic Systems*, Springer, 2007
- W. Paul, J. Baschnagel: *Stochastic Processes*, Springer, 1999
- H. Risken: *The Fokker-Planck Equation*, Springer, 1984
- M. Ullah, O. Wolkenhauer: *Stochastic Approaches for Systems Biology*, Springer, 2011

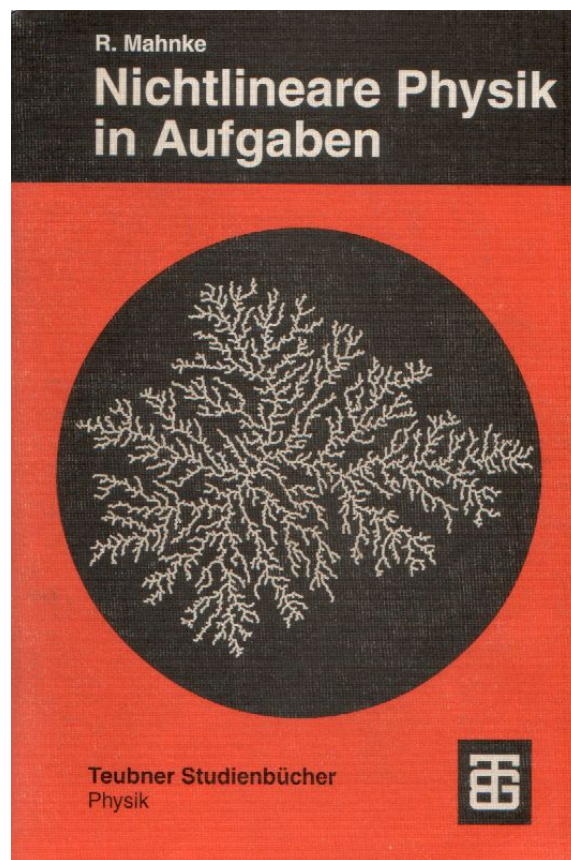


Fig. 2: R. Mahnke: *Nichtlineare Physik in Aufgaben*, Teubner–Studienbücher, Stuttgart, 1994.

Literatur:

- Henry D. I. Abarbanel et. al: Introduction to Nonlinear Dynamics for Physicists, World Scientific, Singapore, 1993
- F. Verhulst: Nonlinear Differential Equations and Dynamical Systems, Springer, Berlin, 1990
- H. G. Schuster: Deterministic Chaos, VCH, Weinheim, 1989

Inhaltsverzeichnis

1	Nichtlineare Dynamik und Chaosforschung	6
2	Klassifikation dynamischer Systeme	10
3	Das mathematische Pendel	18
4	Stabilitätsanalyse dynamischer Systeme	25
5	Zwei oszillatorische dynamische Systeme	30
6	Diskrete Abbildungen	34
7	Die logistische Gleichung	36

Folgende Kap. 1 und 2 aus:

R. Mahnke, *Nichtlineare Physik in Aufgaben*, Teubner, 1994

1 Nichtlineare Dynamik und Chaosforschung

Nichtlineare Phänomene und die aus Nichtlinearitäten resultierenden Möglichkeiten und Formen der Strukturbildung, der Selbstorganisation und der kooperativen Effekte sind in den letzten 20 – 30 Jahren verstärkt in den Blickpunkt der wissenschaftlichen Analyse gerückt. Die Resultate dieser Analyse sind vielfältig, zum Teil ungewohnt und beeinflussen praktisch alle Wissensbereiche in einem Maße, dass sie darüber hinaus in der breiten Öffentlichkeit auf zunehmendes Interesse stossen. Als einige Stichwörter in diesem Zusammenhang seien solche Begriffe wie *dissipative Strukturen*, *Synergetik*, *Bifurkationstheorie*, *Chaos in deterministischen Systemen*, *Fraktale*, *Spingläser* und *Mustererkennung* genannt.

Bei der Analyse hat sich herausgestellt, dass zum Teil unabhängig von den Spezifika der untersuchten Systeme – ob in der Physik, Chemie, Biologie oder auch im Bereich der Soziologie – bei Existenz bestimmter Bedingungen qualitativ gleichartige Phänomene zu beobachten sind. Dies gibt die Möglichkeit, ausgehend von relativ einfachen Modellsystemen allgemeine Verhaltensweisen nichtlinearer Systeme zu studieren. Die Resultate können dann zumindest als Denkmöglichkeiten zur Untersuchung komplexer Systeme herangezogen werden und die bisher weitgehend an Verhaltensweisen linearer Systeme geschulte Intuition erweitern.

Die faszinierenden Effekte und Eigenschaften nichtlinearer dynamischer Systeme werden zumeist an einfachen Modellbeispielen studiert und sich darauf aufbauend den realen Systemen in der Natur und Technik genähert.

Das bekannteste Modellbeispiel der nichtlinearen Dynamik ist ein diskreter Rückkopplungsmechanismus vom Typ $x_{n+1} = rx_n(1 - x_n)$. Diese sogenannte logistische Gleichung (eine Iteration mit einem Kontrollparameter r) wurde erstmalig 1845 vom belgischen Biomathematiker P. F. Verhulst in einer Arbeit zur Populationsdynamik eingeführt. Die Resultate der Analyse dieses einfachen Systems wurde 1978 durch M. Feigenbaum veröffentlicht und zeigen den Übergang von der geordneten Bewegung in das Chaos.

Weitere Beispiele für den Übergang von stabilen zu instabilen Situationen bei Variation eines oder mehrerer Kontrollparameter sowohl in konservativen

als auch dissipativen Systemen sind das angeregte Pendel, das 3-Körper-Problem, nichtlineare Wellen, strömende Flüssigkeiten und Gase, chemische Reaktionen, Teilchenbeschleuniger, biologische Modelle der Populationsdynamik wie z. B. das Räuber-Beute-System, astrophysikalische Objekte. So zeigen Ringe des Planeten Saturn mit der Cassini-Lücke die Struktur von stabilen und instabilen Orbits.

Viele Fragen berühren die Zeitreihenanalyse. Kann aus der Kenntnis einer Datenfolge (experimentelle Werte) auf die inneren nichtlinearen dynamischen Gesetzmäßigkeiten (chaotische Dynamik) geschlossen werden?

Physikalische Gesetzmäßigkeiten werden durch mathematische Gleichungen ausgedrückt. Insbesondere wird die zeitliche Entwicklung dynamischer Systeme durch nichtlineare Bewegungsgleichungen festgelegt. Die Aussagekraft physikalischer Theorien hat sich sowohl im makroskopischen Bereich außerordentlich bewährt – es sei als klassisches Beispiel auf die Vorhersagbarkeit der Bewegung der Planeten verwiesen –, sie geben aber auch das Verhalten im mikroskopischen Bereich präzise wieder – hier kann auf die Erfolge bei der Beschreibung der Eigenschaften von Molekülen und Festkörpern, der Atomkerne und Elementarteilchen verwiesen werden. Es ergibt sich die Frage, ob sich das Verhalten komplizierter Systeme, einschließlich der belebten Natur, auf der Grundlage der uns bekannten physikalischen Gesetzmäßigkeiten vorhersagen läßt.

Systeme aus vielen Teilchen mit vorgegebenen Wechselwirkungen wurden in letzter Zeit intensiv untersucht. Hierbei wurden eine Reihe neuer, hochinteressanter Ergebnisse erhalten. Für die beachtlichen Erfolge dieser Forschung zur Theorie nichtlinearer, komplexer Systeme war die moderne Rechentechnik von besonderer Bedeutung. Durch die numerische Lösung der Bewegungsgleichungen eines Systems aus vielen Teilchen konnten die Bahnkurven der Teilchen berechnet werden (Molekulardynamik). Neue Begriffe wurden eingeführt, um das Verhalten solcher nichtlinearer Systeme zu analysieren und zu beschreiben. Es wurden teilweise auch völlig unerwartete Ergebnisse gefunden, die sowohl die experimentelle physikalische Forschung, aber auch ganz andere Wissenschaftsdisziplinen befruchtet haben.

Ein System zeigt dann ein lineares Verhalten, wenn durch kleine äußere Einwirkungen auch nur kleine Änderungen in den physikalischen Eigenschaften resultieren, wenn Ursache und Wirkung einander proportional sind (starke Kausalität). Wenn die äußere Einwirkung (Kontrollparameter) einen Schwellwert übersteigt, kann das System „umkippen“, es verläßt seinen ursprünglichen Zustand und geht in ein neues Regime über. Diese Nichtlinearität äußert

sich in dem Auftreten völlig neuer Lösungstypen. Beispielsweise werden für eine Kette gekoppelter, anharmonischer Oszillatoren für kleine Auslenkungen normale Schwingungsmoden erhalten. Neue Lösungstypen (Solitonen) treten bei großen Auslenkungen (Überschlag der Pendelkette) auf; sie werden durch eine spezielle topologische Struktur beschrieben.

Besonders anschaulich ist die Herausbildung von (zeitlichen und räumlichen) Strukturen. So zeigt die Belousov–Zhabotinsky–Reaktion, eine Redox–Reaktion, einen periodischen Farbwechsel und eine räumliche Strukturierung mit Führungszentren und Spiralwellen. Spezielle Lichtquellen (Laser) emittieren, wenn die Anregungsleistung einen Schwellwert übersteigt, anstelle einer inkohärenten Strahlung kohärentes Licht. Räumliche Strukturen unterschiedlicher Symmetrie können entstehen, wenn eine Flüssigkeitsschicht von unten genügend stark erhitzt wird (Benard–Zellen). Bei strömenden Flüssigkeiten kann der Übergang von der laminaren Bewegung zur turbulenten Strömung beobachtet werden, wenn bestimmte Grenzwerte überschritten werden. Strukturbildung läßt sich bei Reaktions–Diffusions–Systemen in der Chemie sowie in biologischen Systemen beobachten, auch in der Medizin (als Beispiel sei der Herzrhythmus genannt) werden selbsterregte, nichtlineare Stoffwechselsysteme untersucht. Sie werden durch einfache nichtlineare, gekoppelte Differentialgleichungen modelliert, die auch zur Beschreibung der Selbstorganisation in verschiedenen anderen Bereichen der Natur eingesetzt werden können.

Kleine Änderungen der Anfangslagen in einem System aus vielen Teilchen führen zu Änderungen der Bahnkurven bei der Bewegung dieser Teilchen. Bleiben die Bahnkurven in der Nähe der ursprünglichen, ist das System dynamisch stabil. Entfernen sie sich in einem gewissen Gebiet exponentiell, ist es dynamisch instabil und besitzt einen chaotischen Attraktor. Das unterschiedliche Verhalten der Bahnkurven kann anhand von Poincaré–Abbildungen (Durchstoßpunkte der Trajektorie durch eine spezielle Ebene) dargestellt werden. In Abhängigkeit von Parametern kann zwischen einem periodischen, regulären und einem irregulären, chaotischen Verhalten unterschieden werden.

Bereits für einfache Systeme dreier gekoppelter nichtlinearer Differentialgleichungen (Lorenz–Modell, Rössler–System u.a.) läßt sich der Übergang von einer regulären, periodischen Lösung zu einem irregulären, chaotischem Verhalten bei Änderung vorgegebener Parameter studieren (Feigenbaum–Szenario). Für einfache Systeme harter Scheiben (zweidimensionales Sinai–Billard) konnte streng bewiesen werden, dass chaotische Bewegungsformen

vorliegen. Die Nichtvorhersagbarkeit einer Trajektorie über einen großen Zeitabschnitt ist eine Folge des deterministischen Chaos. Die entsprechenden Modelle wurden ursprünglich eingeführt, um das Verhalten der Atmosphäre zu beschreiben. Somit ist auch die Wetterentwicklung – damit auch die Wettervorhersage – ein typisches Beispiel für chaotisches Verhalten. Unter bestimmten Bedingungen der Instabilität kann bereits eine kleine Störung im Lokalen eine große Auswirkung im Globalen nach sich ziehen. Es ist die berühmte Bewegung eines Schmetterlings in Südamerika, das Schlagen seiner Flügel, dass Auswirkungen auf die Wetterentwicklung in Nordeuropa hat.

Im Gegensatz zu klassischen Systemen läßt sich für Quantensysteme die chaotische Bewegung nur schwer definieren. Gegenwärtige Untersuchungen stellen das Quantenchaos in Beziehung zur Verteilung der Energieniveaus eines Quantensystems.

Ein besonders interessantes Gebiet gegenwärtiger Forschung sind die mesoskopischen Systeme und Cluster. Die Untersuchungen von kleinen Systemen, bestehend aus wenigen Teilchen, zeigen den Übergang von einem komplexen, gebundenen Zustand zu einem makroskopischen kondensierten System mit kollektiven Bewegungsmoden. Hierbei kann es sich bei den gebildeten Aggregaten um Fullerene (Kohlenstoff-Cluster mit bemerkenswerten Eigenschaften), Molekülcluster, metallische Cluster, aber auch um Atomkerne handeln. Das Anregungsspektrum solcher komplexen Systeme kann chaotisches Verhalten zeigen. Insbesondere die Dämpfung von solchen Anregungen zeigt überraschende Effekte. Als Beispiel sei auf die Verteilung der Energie auf verschiedene Freiheitsgrade in komplexen Systemen verwiesen. So ist die Frage von Energietransfer und Energiekonzentration (Aktivierungsenergie) für die Wirkung biologischer Enzyme oder der Photosynthese von entscheidender Bedeutung.

Ein weiteres interessantes Problem ist das Wachstum von Clustern im Nichtgleichgewicht, einschließlich der Herausbildung von fraktalen Strukturen. Auch die Entwicklung sozialer Erscheinungen (Meinungsbildung, Stadtentwicklung, Migration) kann als Clusterbildungs- und Wachstumsprozeß interpretiert werden. Das Verhalten solcher komplexer Systeme, die in Wechselwirkung mit der Umgebung stehen, läßt sich durch einen stochastischen Prozeß simulieren. Fluktuationen und Dissipation werden durch einen Zufallsprozeß, einen Rauschterm, erfaßt. Hochangeregte Atome in der Paul-Falle, die elektrische Leitfähigkeit in mesoskopischen Systemen und weitere Fragen sind interessante Forschungsobjekte zum Studium chaotischen Verhaltens in Quantensystemen. Die Dynamik komplexer Systeme ist insbesondere dann von großem

theoretischen und experimentellen Interesse, wenn sich starke Korrelationen zwischen den Teilchen herausbilden. Eigenschaften solcher Systeme stehen im Mittelpunkt theoretischer Grundlagenforschung sowohl der subatomaren Physik, als auch der Plasmaphysik und Festkörperphysik. Zu den zahlreichen, zur Zeit noch ungeklärten Fragen auf diesem Gebiet stark korrelierter Systeme gehören u. a. die Hochtemperatursupraleitung und die Lokalisation.

Ein weiteres Beispiel für nichtlineare komplexe Systeme sind die neuronalen Netzwerke. Dieses Forschungsgebiet führt Erkenntnisse der Physik, der Informatik, der Mathematik bis hin zur neuronalen Medizin zusammen. Es ist zu erkennen, dass es für die Computerentwicklung, die Kommunikationstechnik und Informationsverarbeitung, aber auch für die Biologie und Medizin von großer Bedeutung ist.

2 Klassifikation dynamischer Systeme

Entwicklungsprozesse, bei denen der gesamte Ablauf in Vergangenheit und Zukunft eindeutig durch den Zustand zum gegenwärtigen Zeitpunkt bestimmt ist, scheinen einfach und keinerlei Besonderheiten in sich zu bergen. Diese Aussagen, seit Newton und Leibniz in Form der klassischen Mechanik vollendet, wurden Anfang dieses Jahrhunderts durch Poincaré revidiert. Er nahm vorweg, was heute, bei der massenhaften Verbreitung von Computern, bis ins Bewußtsein nicht nur von Spezialisten, sondern auch einer breiten Öffentlichkeit dringt: die Resultate der *Theorie nichtlinearer dynamischer Systeme*. Beim Studium nichtlinearer Vorgänge treten das Vorhersehbare und das Unvorhersehbare als Einheit hervor, bekannt sind diese Erscheinungen unter dem Begriff „Deterministisches Chaos“.

Einige Meilensteine auf dem Weg dorthin seien an dieser Stelle nochmals genannt:

1. Eduard Lorenz zeigt, dass sein einfaches Modell aus drei gekoppelten nichtlinearen Differentialgleichungen zu irregulären Trajektorien fähig ist (Lorenz, 1963).
2. Das berühmte Henon–Heiles–Modell entwickelt sich zu einem viel diskutierten Beispiel für numerische und theoretische Studien dynamischer Systeme (Henon, Heiles, 1964).

3. Neben den klassischen Attraktoren (Fixpunkte, Grenzzyklen, . . .) wird die Existenz von seltsamen Attraktoren (strange attractor) nachgewiesen (Ruelle, Takens, 1971).
4. Nichtlineare dynamische Systeme mit vielen Variablen werden zur Modellierung in der Ökologie, Soziologie, den Wirtschaftswissenschaften und weiteren Gebieten eingesetzt, beispielsweise sei die Dynamik von Populationen angeführt (May, 1976).
5. Periodenverdopplungen und Bifurkationen werden in diskreten dynamischen Systemen untersucht. Die logistische Abbildung liefert das berühmte Feigenbaum–Diagramm (Feigenbaum, 1978); im Jahre 1980 folgt Benoit Mandelbrot mit den „Apfelmännchen“ und zeigt dessen fraktale Strukturen auf (Mandelbrot, 1982).

Systeme von Differentialgleichungen 1. Ordnung spielen eine fundamentale Rolle bei der Beschreibung von dynamischen Prozessen. Die mathematische Theorie zur Behandlung von gewöhnlichen Differentialgleichungssystemen ist seit dem vorigen Jahrhundert gut ausgearbeitet; ihre Eckpfeiler sind die Existenz– und Eindeigkeitssätze. Sie sichern, dass die Lösung eines Differentialgleichungssystems existiert und eindeutig bestimmt ist, falls die Werte der unabhängigen Variablen zu einem beliebig vorgegebenen Zeitpunkt bekannt sind. Neben der mathematischen Literatur zur Theorie dynamischer Systeme sind besonders für den Physiker die von Vladimir Arnold zu diesem Thema verfaßten Monographien und Lehrbücher, beispielsweise die deutsche Übersetzung (Arnold, 1979), hervorzuheben.

Die unerwartet stürmische Entwicklung zur klassischen Dynamik relativ einfacher Systeme mit wenigen Freiheitsgraden ist in einer kaum überschaubaren großen Anzahl von Artikeln in Fachzeitschriften und Monographien dargestellt. Einen guten Überblick und Einstieg in die Theorie konservativer und dissipativer nichtlinearer dynamischer Systeme geben u. a. (Anishchenko, 1987; Arnold, 1980; Ebeling, Feistel, 1982; Ebeling, Engel, Feistel, 1990; Guckenheimer, Holmes, 1983; Jetschke, 1989; Kunik, Steeb, 1986; Lichtenberg, Lieberman, 1983; Schuster, 1984; Steeb, 1994). Zur Theorie der schwingungsfähigen Systeme verweisen wir zusätzlich auf den „aktuellen Klassiker“ (Andronov, Witt, Chaikin, 1965, 1969). Neue Lehrbücher zur theoretischen Mechanik, die das dynamische System in den Mittelpunkt stellen und darauf aufbauend nicht nur die wenigen integrablen Beispiele untersuchen, fehlen in der Regel noch. Eine bemerkenswerte Ausnahme ist das Lehrbuch von Scheck (1988) mit dem Untertitel „Von der Newtonschen Mechanik zum deterministischen Chaos“ einschließlich der Aufgaben und Lösungen (Scheck, Schöpf,

1989).

Im folgenden wollen wir kurz den Begriff des dynamischen Systems einführen und eine Klassifikation dynamischer Systeme nach unterschiedlichen Kriterien vorstellen. Anschließend werden allgemeine Resultate zur Evolution in Hamiltonschen Systemen zusammengefaßt.

Ein (physikalisches) System sei durch einen Satz von unabhängigen Variablen x_i ($i = 1, 2, \dots, n$) bestimmt. Diese Größen x_i spannen einen Zustandsraum X auf. Der Zustand des Systems ist zu jedem Zeitpunkt t durch die Angabe der Werte der Variablen $x_i(t)$ eindeutig bestimmt

$$x(t) = (x_1(t), x_2(t), \dots, x_n(t)) \quad \text{Zustandsvektor} \quad (1)$$

und repräsentiert einen Punkt im Zustandsraum.

Die Bewegung des Zustandes wird mittels einer Evolutionsgleichung festgelegt, insbesondere gilt für ein dynamisches System, dass das Bewegungsgesetz durch einen Satz von gewöhnlichen Differentialgleichungen 1. Ordnung definiert ist.

Sei $x(t)$ ein n -dimensionaler Zustandsvektor, so ist ein dynamisches System gegeben durch Bewegungsgleichungen vom Typ gewöhnlicher Differentialgleichungen 1. Ordnung der Art

$$\frac{d}{dt}x(t) = v [x(t)] \quad \text{Bewegungsgleichungen} . \quad (2)$$

Das dynamische System ist somit eine Abbildung vom Zustand $x_0 \equiv x(t_0)$ zum Zeitpunkt t_0 (Anfangswert) in den Zustand $x(t)$ zum Zeitpunkt t , d.h. eine Abbildung $x(t) = T^t x_0$. Die Bewegung im Zustandsraum heißt Bahnkurve, Orbit oder Trajektorie und ist durch die rechten Seiten der Bewegungsgleichungen, d. h. durch den Geschwindigkeitsvektor $v(x)$, eindeutig bestimmt. Die Lösung des dynamischen Systems bestimmen heißt also, die Menge aller Trajektorien

$$x(t) = F(t; t_0, x_0) \quad \text{Trajektorie} \quad (3)$$

für alle möglichen Anfangszustände x_0 zu jedem Zeitpunkt t zu kennen. Dabei interessiert es nicht so sehr, eine spezielle Trajektorie (gehörig zum Anfangswert x_0) zu kennen, sondern das qualitative und möglichst auch das quantitative Verhalten aller Trajektorien, d.h. den Fluss im Zustandsraum vollständig zu analysieren. Die Topologie der Zustandsraums studieren heißt also, auf die folgenden Fragen einzugehen:

- Existieren ausgezeichnete Punkte (singuläre Zustände, Fixpunkte) im Zustandsraum?
- Wie verhält sich der Fluss in der Nähe dieser Punkte?
- Ist der Fluss kontrahierend bzw. expandierend oder nicht?

Die Klassifikation dynamischer Systeme kann nach verschiedenen Kriterien erfolgen. Wir schlagen nun die folgende Variante vor, wobei die fett markierten Eigenschaften in den nachfolgenden Kapiteln im Mittelpunkt stehen werden.

a) Lineare / **nichtlineare** dynamische Systeme

Ist die Geschwindigkeit $v(x)$ eine lineare Funktion in x , d.h.

$$\dot{x} = Ax \quad ; \quad x(t = t_0) = x_0 , \quad (4)$$

so ist die allgemeine Lösung bekannt und lautet

$$x(t) = x_0 \exp(At) . \quad (5)$$

Es gilt das Superpositionsprinzip. Zu beachten ist aber, dass schon die einfachsten realen Systeme (man denke beispielsweise an das mathematische Pendel) nichtlinear sind.

b) **Endlich-** / **unendlich-dimensionale** dynamische Systeme

Ist der Zustandsraum endlich-dimensional ($n < \infty$), so sind die Dynamiken mit $n = 1$ und $n = 2$ bekannt und im Prinzip stets analytisch lösbar, interessant wird es für die Situationen mit $n \geq 3$.

Falls die Zahl der unabhängigen Variablen sehr groß ($n \rightarrow \infty$) wird, so verliert das dynamische System in der Definition (1, 2) seinen Sinn und es sind dann andere Evolutionsgleichungen (partielle Differentialgleichungen) zu verwenden. Für Reaktions-Diffusions-Systeme ist die dynamische Bewegungsgleichung für die orts- und zeitabhängige Konzentration $c(r, t)$ vom Typ

$$\frac{\partial c}{\partial t} = f [c(r, t)] + \frac{\partial^2 c}{\partial^2 r} . \quad (6)$$

Fig. 3: Eindeutige Bahnkurven einer deterministischen Beschreibung bei starker Kausalität (links) und schwacher Kausalität (rechts).

c) **Deterministische / stochastische** dynamische Systeme

Wirken auf das System keine äußeren Einflüsse, die ein Schwanken der Kontrollparameter veranlassen könnten, und ist auch keine innere Rauschquelle im System vorhanden, so existiert bei dieser deterministischen Beschreibung eine eindeutige reguläre oder chaotische Bahn (siehe Abb. 3).

Ist andernfalls Rauschen von Bedeutung, so führt dies zu einer stochastischen Beschreibung von dynamischen Systemen (Röpke, 1987; Malchow, Schimansky–Geier, 1985). Die Abbildung 4 zeigt als Skizze mehrere Realisierungen desselben dynamischen Prozesses mit einer sich herausbildenden Verteilung $p(x, t)$.

Stochastische dynamische Systeme werden entweder durch Evolutionsgleichungen vom Langevin–Typ mit einer stochastischen Kraft oder Rauschquelle $\Gamma(t)$

$$\frac{d}{dt}x(t) = v [x(t)] + \Gamma(t) \quad (7)$$

oder durch eine Bilanzgleichung im Wahrscheinlichkeitsraum, die Mastergleichung

$$\frac{\partial p(x, t)}{\partial t} = \sum_{x'} [w(x, x')p(x', t) - w(x', x)p(x, t)] \quad (8)$$

beschrieben. $w(x', x)$ heißt Übergangswahrscheinlichkeit vom Zustand x nach x' .

Fig. 4: Mehrdeutige Bahnkurven einer stochastischen Beschreibung mit der zeitlichen Entwicklung einer Wahrscheinlichkeitsverteilung $p(x, t)$.

d) **Autonome** / nichtautonome dynamische Systeme

Liegt noch zusätzlich eine explizite Zeitabhängigkeit (neben der üblichen impliziten) vor, so handelt es sich um ein nichtautonomes dynamisches System

$$\frac{d}{dt}x(t) = v [x(t) , t] . \quad (9)$$

Die Autonomie läßt sich aber wieder herstellen, in dem der Zustandsraum um eine Dimension ($x_{n+1} = t$) erweitert und eine neue Zeit u eingeführt wird

$$\frac{dx_i}{du} = v_i (x_1, x_2, \dots, x_{n+1}) \quad \text{für } i = 1, 2, \dots, n + 1 . \quad (10)$$

Damit ist die Rückführung auf ein autonomes dynamisches System gegeben. In kompakter Schreibweise entspricht (10) den Bewegungsgleichungen (2).

e) **Kontinuierliche** / **diskrete** dynamische Systeme

Aus den gewöhnlichen Differentialgleichungen 1. Ordnung werden Differenzgleichungen, wenn die Zeit diskretisiert wird, u. z.

$$t \rightarrow t_0, t_1, \dots, t_i, \dots \quad ; \quad t_i = t_0 + i\Delta t \quad (11)$$

$$\dot{x} = v(x) \rightarrow x(t + \Delta t) = x(t) + v(x(t))\Delta t + O(\Delta t^2) . \quad (12)$$

Fixieren wir den Zeitschritt zu eins ($\Delta t = 1$), so folgt aus (12) die Iterationsgleichung

$$x(t + 1) = x(t) + v(x(t)) \equiv \tilde{v}(x(t)) . \quad (13)$$

Wir erhalten somit als Evolutionsgleichung für das diskrete dynamische System eine Abbildung \tilde{v} der Art

$$x_{t+1} = f(x_t). \quad (14)$$

Bekanntestes Beispiel ist die logistische Abbildung mit einer quadratischen Nichtlinearität

im Reellen:	$x_{i+1} = rx_i(1 - x_i)$	P. F. Verhulst (1845) Feigenbaum-Diagramm
im Komplexen:	$z_{i+1} = z_i^2 + c$	B. Mandelbrot (1980) Apfelmännchen-Bild

Zu diesen Abbildungen und weiteren nichtlinearen Modellen ein- und mehrdimensionaler diskreter dynamischer Systeme existiert umfangreiche Literatur (Schuster, 1984). Diese Iterationen dienen häufig als Prototypen für das Studium des deterministischen Chaos und der Selbstähnlichkeit.

f) **Konservative / dissipative** dynamische Systeme

Diese Unterscheidung ist von großem inhaltlichen Interesse, da die unterschiedlichen (physikalischen) Systeme in zwei große Gruppen zerlegt werden können. Eine verbale Formulierung lautet wie folgt.

Gibt es im Zustandsraum einen kontrahierenden oder expandierenden Fluss, dann handelt es sich um ein dissipatives dynamisches System. In solchen Systemen existieren Attraktoren (anziehende singuläre Punkte, stabile Grenzzyklen, höherdimensionale anziehende Tori, seltsame Attraktoren) und Repeller (abstoßende singuläre Punkte, instabile Grenzzyklen, höherdimensionale instabile Mannigfaltigkeiten).

Herrscht dagegen im Zustandsraum eine konstante Zustandsraumdichte, dann handelt es sich um ein konservatives System. Damit ist das Auftreten von Quellen (Repellern) und Senken (Attraktoren) unmöglich, es gibt höchstens elliptische und hyperbolische Fixpunkte (Wirbel, Sattel, siehe Abb. 5) und semistabile Grenzzyklen bzw. Tori.

Eine wichtige Klasse der konservativen dynamischen Systeme sind die Hamiltonschen Systeme. Der Zustandsraum heißt in diesem Fall Phasenraum $x = (q, p)$, gebildet aus den generalisierten Orten q und den Impulsen p . Er hat die Dimension $n = 2f$, wobei f die Zahl der Freiheitsgrade des Systems ist. Die Evolutionsgleichungen des dynamischen

Fig. 5: Elliptischer (links) und hyperbolischer Fixpunkt (rechts) in konservativen Systemen.

Systems (2) sind die Hamiltonschen Bewegungsgleichungen

$$\frac{dq}{dt} = \frac{\partial H}{\partial p} \quad (15)$$

$$\frac{dp}{dt} = -\frac{\partial H}{\partial q} \quad (16)$$

mit der nichtlinearen Hamilton-Funktion

$$H = H(q, p) \equiv H(q_1, q_2, \dots, q_f, p_1, p_2, \dots, p_f) . \quad (17)$$

Die Gleichungen (15, 16) repräsentieren $2f$ gekoppelte nichtlineare Differentialgleichungen 1. Ordnung. Es gilt das Liouville-Theorem über den inkompressiblen Fluss im Phasenraum (Arnold, 1980; Landau, Lifschitz, 1981; Scheck, 1988)

$$\operatorname{div} v = \operatorname{div} (\dot{q}, \dot{p}) = \sum_i \left(\frac{\partial^2 H}{\partial q_i \partial p_i} - \frac{\partial^2 H}{\partial p_i \partial q_i} \right) = 0 . \quad (18)$$

Hiermit schließen wir unsere Klassifikation ab und stellen abschließend die Frage: Gibt es eine konstruktive Methode, so dass ein dynamisches System mit beliebigen Differentialgleichungen 1. Ordnung in Hamiltonscher Form geschrieben werden kann? Mit anderen Worten: Unter welchen Voraussetzungen lassen sich die allgemeinen Evolutionsgleichungen (2) in die kanonische Form (15, 16) überführen?

Unter Verwendung der Poisson-Klammern $\{\cdot, \cdot\}$ lautet die Fragestellung,

unter welchen Bedingungen

$$\dot{x} = v(x) = \begin{pmatrix} \dot{q} \\ \dot{p} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \partial H / \partial p \\ \partial H / \partial q \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \{H, q\} \\ \{H, p\} \end{pmatrix} \stackrel{?}{=} \{H, x\} \quad (19)$$

bzw. in Komponentenschreibweise

$$\dot{x}_i = v_i(x_1, \dots, x_n) \stackrel{?}{=} \{H(x_1, \dots, x_n), x_i\} = \sum_j \{x_i, x_j\} \frac{\partial H}{\partial x_j} \quad (20)$$

möglich ist. Dabei wird die Poisson–Klammer wie üblich als ein linearer antisymmetrischer Operator mit der Eigenschaft der Jacobi–Identität (Lie–Gruppeneigenschaft) verstanden. Es gilt

$$\{A, B\} = \sum_i \sum_j \{x_i, x_j\} \frac{\partial A}{\partial x_j} \frac{\partial B}{\partial x_i} \quad (21)$$

mit $P_{ij}(x_1, \dots, x_n) = \{x_i, x_j\}$ als Poisson–Tensor.

Die Aufgabenstellung lautet somit, ob ein gegebenes Vektorfeld $v(x)$ als

$$v_i(x) = \sum_j P_{ij}(x) \frac{\partial H}{\partial x_j} \quad (22)$$

geschrieben werden kann. In (Abarbanel, Rouhi, 1987) wird eine konstruktive Methode beschrieben, die es gestattet, für lokale Bereiche des Zustandsraumes die Hamilton–Funktion $H(x)$ des Feldes $v(x)$ zu konstruieren, beispielsweise für den gedämpften harmonischen Oszillator.

3 Das mathematische Pendel

Die Theorie nichtlinearer dynamischer Systeme (siehe Kapitel 2) umfaßt unter anderem die klassische theoretische Mechanik. Moderne Lehrbücher der Mechanik stellen die kompakte Formulierung des Fachgebietes durch den Lagrange– und den Hamilton–Formalismus (kanonische Mechanik) in den Mittelpunkt (Scheck, 1988; Honerkamp, Römer, 1986; Stauffer, Stanley, 1990). Diese Formalismen sind auf Systeme mit beliebiger Teilchenzahl bzw. beliebiger Zahl von Freiheitsgraden f anwendbar, jedoch ist in der Regel nur der Spezialfall linearer Systeme analytisch auswertbar. Für nichtlineare Systeme lassen sich die Bewegungsgleichungen im allgemeinen nicht geschlossen

lösen.

Bezeichnen wir mit $\underline{q} = (q_1, q_2, \dots, q_f)$ die generalisierten Orte und mit $\underline{p} = (p_1, p_2, \dots, p_f)$ die generalisierten Impulse, so spannen diese Variablen den $2f$ -dimensionalen Phasenraum (Zustandraum) auf, in dem das dynamische System lebt. Ausgehend von einem wohl definierten Anfangszustand $\underline{q}(t=0) = \underline{q}_0$, $\underline{p}(t=0) = \underline{p}_0$ kann die Evolution des mechanischen Systems anhand der Trajektorie (Bahnkurve) verfolgt werden, die sich als Lösung der kanonischen Bewegungsgleichungen

$$\dot{q}_i \equiv \frac{dq_i}{dt} = \frac{\partial H}{\partial p_i} \quad ; \quad \dot{p}_i \equiv \frac{dp_i}{dt} = -\frac{\partial H}{\partial q_i} \quad \text{für } i = 1, \dots, f \quad (23)$$

ergibt. Dabei ist

$$H(\underline{q}, \underline{p}) = \sum_{i=1}^f \dot{q}_i p_i - L(\underline{q}, \dot{\underline{q}}) \quad (24)$$

die Hamilton-Funktion des Systems, wobei $L = T - V$ die Lagrange-Funktion und $p_i = \partial L / \partial \dot{q}_i$ die Impulse sind. Das Schema zur Lösung von Aufgaben der klassischen Mechanik umfaßt folgende Schritte:

1. Konstruktion der Hamilton-Funktion $H = H(\underline{q}, \underline{p})$
2. Einsetzen in die Bewegungsgleichungen (23) und
3. Lösung des (im allgemeinen nichtlinearen gekoppelten) Differentialgleichungssystems unter Berücksichtigung der Anfangsbedingungen.

Das Spektrum von Resultaten reicht von den bekannten elementaren Bewegungen (freies Teilchen, harmonischer Oszillator) über „im Prinzip“ integrable Bewegungen mit einem Freiheitsgrad $f = 1$ (mathematisches Pendel, Kettenkarussell), mehrdimensionale gekoppelte Feder-Pendel-Systeme (gekreuzte Federn, Pedelkette und vieles andere) bis hin zum deterministischen Chaos in konservativen und dissipativen Systemen.

Betrachten wir einleitend das eindimensionale lineare Problem. Die Bewegungsgleichungen für konservative mechanische Systeme mit einem Freiheitsgrad lassen sich bekannterweise aus der Lagrange-Funktion

$$L(q, \dot{q}) = T - V \quad (25)$$

oder aus der Hamilton-Funktion

$$H(q, p) = T + V \quad (26)$$

Fig. 6: Potential $V(q)$ eines nichtlinearen Systems und harmonische Näherung (punktierte Kurve).

gewinnen. Hierbei seien T die kinetische Energie und $V(q)$ die potentielle Energie des Systems. Für nichtlineare Systeme ist das Potential V eine beliebige Funktion von q und kann im allgemeinen mehrere Minima haben, die stationären Zuständen entsprechen (Abb. 6). Das Potential $V(q)$ läßt sich an dem relativen Minimum q_0 entwickeln und für kleine Auslenkungen durch einen quadratischen Ausdruck

$$V(q) = a + b(q - q_0)^2 \quad (27)$$

mit

$$a = V(q_0) \quad ; \quad b = V''(q_0)/2 \quad (28)$$

approximieren (harmonische Näherung). Als Beispiel sei der eindimensionale harmonische Oszillator genannt. Für große Auslenkungen werden Abweichungen vom linearen Verhalten spürbar (Anharmonizität). Die Lösungen für das mehrdimensionale lineare Oszillatorproblem sind gut bekannt und können in geschlossener Form angegeben werden. Viele Probleme lassen sich in harmonischer Näherung behandeln, wobei in der Regel mehrere Freiheitsgrade auftreten. Dann werden die Bewegungsgleichungen durch die Einführung von Normalmoden entkoppelt, wie das z.B. bei der Behandlung von Kristallgitterschwingungen in der elastischen linearen Näherung geschieht.

In diesem Abschnitt soll das Standardbeispiel für nichtlineare Systeme, das mathematische Pendel bei beliebigen Auslenkungen (Abb. 7), untersucht werden. Dieses mechanische System ist durch einen Freiheitsgrad (Winkel α) charakterisiert und wird wie folgt im Lagrange-Formalismus (Lagrange-

Fig. 7: Skizze eines mathematische Pendels.

Funktion, Bewegungsgleichung)

$$L(\alpha, \dot{\alpha}) = \frac{m}{2} l^2 \dot{\alpha}^2 - mgl(1 - \cos \alpha) \quad (29)$$

$$\ddot{\alpha} = -\omega^2 \sin \alpha \quad (30)$$

oder im Hamilton-Formalismus (Hamilton-Funktion, Bewegungsgleichungen)

$$H(\alpha, p_\alpha) = \frac{p_\alpha^2}{2ml^2} + mgl(1 - \cos \alpha) = E \quad (31)$$

$$\dot{\alpha} = \frac{p_\alpha}{ml^2} \quad (32)$$

$$\dot{p}_\alpha = -mgl \sin \alpha \quad (33)$$

beschrieben, wobei $\omega^2 = g/l$ die Kopplungsstärke an das Gravitationsfeld ausdrückt und für kleine Auslenkungen des Pendels die Bedeutung der Kreisfrequenz der Pendelschwingung hat. Das erste Integral der Bewegung (Erhaltungsgröße) ist die Gesamtenergie E . Es gilt (vergleiche 29)

$$E = \frac{m}{2} l^2 \dot{\alpha}^2 + mgl(1 - \cos \alpha) \quad (34)$$

bzw. der Ausdruck (31). Aus dem Energieerhaltungssatz folgt für die Trajektorie

$$E = ml^2 \left(\frac{\dot{\alpha}^2}{2} + \omega^2(1 - \cos \alpha) \right), \quad (35)$$

bei Benutzung von $\sin^2 x = \frac{1}{2}(1 - \cos 2x)$; $2x = \alpha$

$$E = ml^2 \left(\frac{\dot{\alpha}^2}{2} + 2\omega^2 \sin^2 \frac{\alpha}{2} \right). \quad (36)$$

Nach Einführung einer neuen Energieskala

$$\varepsilon^2 = \frac{E}{2ml^2} \quad (37)$$

erhalten wir aus (36) mittels

$$\varepsilon^2 = \frac{\dot{\alpha}^2}{4} + \omega^2 \sin^2 \frac{\alpha}{2} \quad (38)$$

die Trajektorie

$$\dot{\alpha}(\alpha; \varepsilon) = \pm 2\varepsilon \sqrt{1 - \frac{\omega^2}{\varepsilon^2} \sin^2 \frac{\alpha}{2}}. \quad (39)$$

Offensichtlich existiert ein dimensionsloser Kontrollparameter (dimensionslose Energie)

$$a^2 \equiv \frac{\varepsilon^2}{\omega^2} = \frac{E}{2mgl} \geq 0. \quad (40)$$

Damit lautet die Trajektoriengleichung (39) für die Winkelgeschwindigkeit

$$\dot{\alpha}(\alpha; a) = \pm 2\omega a \sqrt{1 - \frac{1}{a^2} \sin^2 \frac{\alpha}{2}}, \quad (41)$$

bzw. in der Impulsschreibweise $p_\alpha = ml^2 \dot{\alpha}$

$$p_\alpha(\alpha; a) = \pm 2ml^2 \omega a \sqrt{1 - \frac{1}{a^2} \sin^2 \frac{\alpha}{2}}. \quad (42)$$

Die Abbildung 8 zeigt das Trajektorienbild für das mathematische Pendel als numerische Lösung der kanonischen Bewegungsgleichungen (32 und 33) für verschiedene skalierte Energiewerte. Die Separatrix hat den Energiewert $E = 2mgl$ bzw. mit (40) den Wert $a = 1$. Fassen wir die Resultate aus der Analyse des Phasenraumporträts für das mathematische Pendel zusammen:

1. $E_{min} = 0$ bzw. $a = 0$

Pendel in der Gleichgewichtslage

$$\{\alpha(t) = \alpha(0) = 0, p_\alpha(t) = p_\alpha(0) = 0\}$$

2. $E_{min} < E < E_{sx}$ bzw. $0 < a < 1$

„Bindungszustand“, stets geschlossene Trajektorien, Libration um den Gleichgewichtszustand, Schwingungsregime

Fig. 8: Phasenraumporträt des mathematischen Pendels. In Abhängigkeit der dimensionslosen Energie sind die Ruhelage ($\varepsilon^2 = 0$; $(0,0)$ elliptischer Fixpunkt), die Libration ($0 < \varepsilon^2 < \omega^2$), die Bewegung entlang der Separatrix ($\varepsilon^2 = \omega^2$, $(\pm\pi, 0)$ hyperbolische Fixpunkte) und die Rotation ($\varepsilon^2 > \omega^2$) dargestellt (Nobach, Mahnke, 1994).

3. $E = E_{sx} = 2mgl$ bzw. $a = 1$

Separatrix, Grenzkurve trennt geschlossene Orbits von offenen Bahnkurven, Kriechbewegung, erreicht asymptotisch für $t \rightarrow \infty$ den Sattelpunkt $(\pm\pi, 0)$

4. $E > E_{sx}$ bzw. $a > 1$

„Streuzustand“, offene Trajektorien, Rotationsregime.

Das mathematische Pendel ist ein integrables System. Das Zeitverhalten $\alpha(t)$ folgt mittels Einsetzen von (42) in die Bewegungsgleichung (32). Nach Trennung der Variablen erhalten wir unter Verwendung des Halbwinkels $\beta = \alpha/2$ das Integral

$$\pm\omega t(\alpha) = \int \frac{d\beta}{\sqrt{a^2 - \sin^2 \beta}}. \quad (43)$$

Die expliziten Lösungstypen des Integrals (43) sollen hier kurz skizziert werden.

Entsprechend dem Wert des Kontrollparameters a (40) bzw. der Energie ε (37) können drei Fälle unterschieden werden. Für kleine Energiewerte $a < 1$

Fig. 9: Mathematisches Pendel im Schwingungsregime, $\varepsilon < \omega$ (Nobach, Mahnke, 1994).

bzw. $\varepsilon < \omega$ erhalten wir anharmonische oszillatorische Lösungen. Das Librationsverhalten des mathematischen Pendels ist in der Abbildung 9 als Winkel-Zeit-Funktion dargestellt. Analytische Lösungen lassen sich für diesen Fall unter Verwendung der Jacobischen Elliptischen Funktion angeben. Dieses anharmonische Verhalten geht für kleine Auslenkungen bzw. verschwindender Energie $\varepsilon \rightarrow 0$ in die harmonische Schwingung über. Die Auswertung von (43) für $0 < a < 1$ liefert die in Abb. 9 dargestellten Kurven.

Untersuchen wir als zweiten Fall die Bewegung entlang der Separatrix (siehe Phasenraumporträt, Abb. 8). In diesem Grenzfall zwischen Schwingungs- und Rotationsregime ist $\varepsilon = \omega$ bzw. $a = 1$, somit vereinfacht sich (42) zu

$$p_{sx}(\alpha = \alpha_{sx}, a = 1) = \pm 2ml^2\omega \sqrt{1 - \sin^2 \frac{\alpha_{sx}}{2}} \quad (44)$$

$$p_{sx} = \pm 2ml^2 \sqrt{\frac{g}{l}} \cos \frac{\alpha_{sx}}{2} . \quad (45)$$

Gleichung (45), in die Bewegungsgleichung (32) eingesetzt, liefert das Winkel-Zeit-Gesetz. Es gilt

$$\dot{\alpha}_{sx} = \frac{p_{sx}}{ml^2} = \pm 2\omega \cos \frac{\alpha_{sx}}{2} . \quad (46)$$

Nach Trennung der Variablen und Integration folgt

$$\pm 2\omega \int dt = \int \frac{d\alpha_{sx}}{\cos(\alpha_{sx}/2)} \quad (47)$$

$$\pm \omega t = \ln \tan \left(\frac{\alpha_{sx}}{4} + \frac{\pi}{4} \right) + C . \quad (48)$$

Fig. 10: Kink- ($\eta = +1$) und Antikink- ($\eta = -1$) Lösung des mathematischen Pendels, $\varepsilon = \omega$ (Nobach, Mahnke, 1994).

Nun ist diese Gleichung zu invertieren. Wir verwenden eine neue Integrationskonstante $D = e^{-C}$ und erhalten

$$\alpha_{sx}(t) = 4 \arctan [D \exp(\pm\omega t)] - \pi . \quad (49)$$

Diese Kink-Lösung (Schwelle, Stufe) bzw. Antikink-Lösung (Abb. 10) enthält noch die Konstante D , die aus der Anfangsbedingung zu bestimmen ist. Wegen $\alpha_{sx}(t = 0) = \alpha_0 = 4 \arctan [D] - \pi$ folgt als Endergebnis die Gleichung (49) zusammen mit

$$D = \tan \left(\frac{\alpha_0}{4} + \frac{\pi}{4} \right) . \quad (50)$$

Für Anfangswinkel $\alpha_0 = 0$ gilt somit $D = \tan(\pi/4) = 1$. Starten wir im hyperbolischen Fixpunkt $\alpha_0 = \pm\pi$, so findet keine Bewegung statt.

Für den dritten Grenzfall ($a > 1$ bzw. $\varepsilon > \omega$, Rotationsfall) sind die Lösungstypen monotone Funktionen ohne Umkehrpunkte, und haben die Gestalt einer Treppe (Abb. 11). Das Pendel schlägt über und führt ungleichförmige Rotationen aus. Erst in der Grenze $\varepsilon \rightarrow \infty$ rotiert das mathematische Pendel gleichförmig.

4 Stabilitätsanalyse dynamischer Systeme

Zum besseren Verständnis der Methoden zur Behandlung nichtlinearer dynamischer Systeme wird zunächst die Untersuchung einfacher Modellsysteme empfohlen. Diese Modelle spielen bei der Diskussion zu Problemen der Strukturbildung eine große Rolle. Die gelernten Methoden lassen dann auch auf

Fig. 11: Das Rotationsregime des mathematischen Pendels, $\varepsilon > \omega$ (Nobach, Mahnke, 1994).

komplexe Systeme übertragen.

Die folgenden Aufgaben behandeln spezielle zwei- bzw. dreidimensionale kontinuierliche dynamische Systeme, deren Zustandsraumdynamik zu analysieren ist. Analytisch sind Fixpunkte und periodische Lösungen (z.B. Grenzzyklen) zu bestimmen. Anschließend ist die Stabilitätsanalyse durchzuführen, um die stabilen Lösungen zu erhalten. Kritische Werte der Kontrollparameter, bei denen sich das Stabilitätsverhalten stationärer Zustände ändert, sind anzugeben. Numerisch sind einzelne Trajektorien zu berechnen, um so einen Überblick über den Fluß im Zustandsraum zu erhalten.

Da im allgemeinen das dynamische System (siehe Kapitel 2, Gleichung 2)

$$\frac{d}{dt}x(t) = v(x(t)) \quad ; \quad x_0 = x(t_0) \quad (51)$$

zu kompliziert ist, um den Fluß (Menge aller Trajektorien, Gleichung 3) vollständig zu bestimmen, beschränkt man sich häufig auf die Ermittlung der stationären Zustände, auch Fixpunkte oder singuläre Punkte genannt. Die stationären Lösungen ($dx/dt \equiv \dot{x} = 0$) folgen aus einem System algebraischer Gleichungen

$$v(x) = 0 \implies x_{st} = (x^{(0)}, x^{(1)}, \dots) \quad \text{Fixpunkte} \quad (52)$$

und entsprechen physikalisch den Gleichgewichtszuständen. Es erhebt sich nun folgende wichtige Frage: Welche Zustände werden bevorzugt angelaufen, wenn das System bei festen Parametern mehrere Gleichgewichtslagen besitzt? Die Antwort gibt die Stabilitätsanalyse der Fixpunkte (Fixpunktanalyse).

Ein stationärer Zustand x_{st} heißt stabil (andernfalls instabil), wenn eine kleine Schwankung δx

$$x(t) = x_{st} + \delta x \quad (53)$$

im Laufe der Zeit abklingt

$$|\delta x| = |x(t) - x_{st}| \rightarrow 0 \quad \text{für} \quad t \rightarrow \infty, \quad (54)$$

(andernfalls sich aufschauelt und der stationäre Zustand dabei verlassen wird).

Eine Trajektorie, die nicht von einem singulären Punkt startet, kann einen stabilen Fixpunkt nur asymptotisch für $t \rightarrow \infty$ erreichen. Die Frage nach der Stabilität bzw. Instabilität stationärer Lösungen kann mit der Methode der kleinen Störungen entschieden werden. Dazu wird in der Umgebung von x_{st} eine Taylorentwicklung durchgeführt, u. z.

$$\delta x = x(t) - x_{st} \equiv y \quad (55)$$

$$\frac{dy}{dt} = v(x_{st}) + \left. \frac{dv}{dx} \right|_{x=x_{st}} y + \dots \quad (56)$$

$$= py \quad \text{mit} \quad p = v'(x_{st}) \quad (57)$$

mit der Lösung

$$y(t) = y(0) \exp(pt) . \quad (58)$$

Für eindimensionale dynamische Systeme, die sich auch stets als Gradientensysteme mit Hilfe einer Potentialfunktion $V(x)$ schreiben lassen

$$\dot{x} = v(x) = -\frac{dV(x)}{dx}, \quad (59)$$

ist die Stabilitätsanalyse elementar. Es gilt

1. $p < 0$ x_{st} ist stabil (exponentielles Abklingen der Störung)
2. $p > 0$ x_{st} ist instabil (exponentielles Anwachsen der Störung)
3. $p = 0$ x_{st} ist labil (instabil, eindimensionaler Sattel)
Analyse unter Verwendung der Ableitung 2. Ordnung nötig

$$\dot{y} = \frac{1}{2} v''(x_{st}) y^2 = p_2 y^2 . \quad (60)$$

Die Fixpunktanalyse für zweidimensionale dynamische Systeme liefert in linearer Näherung

$$\frac{dy_i}{dt} = \sum_{k=1}^2 a_{ik} y_k \quad \text{mit} \quad a_{ik} = \left. \frac{\partial v_i(x_1, x_2)}{\partial x_k} \right|_{x_k = x_k^{st}}. \quad (61)$$

Die Lösung wird wiederum mit dem Exponentialansatz ermittelt, u. z.

$$y_k(t) = y_k(0) \exp(pt) \quad (62)$$

$$p y_i = \sum_k a_{ik} y_k \quad (63)$$

$$0 = \sum_k (a_{ik} - p \delta_{ik}) y_k \quad (64)$$

$$0 = \begin{vmatrix} a_{11} - p & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} - p \end{vmatrix}. \quad (65)$$

Gesucht sind die Wurzeln p_1, p_2 der zuletzt genannten charakteristischen Gleichung

$$p^2 + A_1 p + A_0 = 0 \quad (66)$$

mit

$$A_1 = -(a_{11} + a_{22}) = -\text{Spur } a_{ik} \quad (67)$$

$$A_0 = a_{11} a_{22} - a_{12} a_{21} = \text{Det } a_{ik}. \quad (68)$$

Asymptotische Stabilität (negative Realteile der Wurzeln p_1 und p_2) liegt nach dem Hurwitz – Kriterium vor, wenn

$$A_1 > 0 \quad \text{und} \quad A_0 > 0 \quad (69)$$

gilt.

Insgesamt existieren sechs Möglichkeiten, die in der Abbildung 12 zusammengefaßt sind.

1. p_1, p_2 reell, negativ \implies stabiler Knoten
2. p_1, p_2 reell, positiv \implies instabiler Knoten
3. p_1, p_2 komplex, negativer Realteil \implies stabiler Strudel
4. p_1, p_2 komplex, positiver Realteil \implies instabiler Strudel
5. p_1, p_2 reell, unterschiedlicher Vorzeichen \implies Sattel

Fig. 12: Skizze zur Klassifikation der verschiedenen Fixpunkte in der Parameterebene.

6. p_1, p_2 rein imaginär \implies Wirbel

Die Fallunterscheidungen lassen sich an Hand eines einfachen zweidimensionalen dynamischen Systems studieren. Bezeichnen wir die beiden Variablen mit r (Abstand zum Koordinatenursprung, Radius) und α (Winkel zur positiven x -Achse), die zwei Kontrollparameter mit a_1 und a_2 . Die Bewegungsgleichungen seien

$$\dot{r} = a_1 r \quad (70)$$

$$\dot{\alpha} = a_2 . \quad (71)$$

Da diese beiden Gleichungen entkoppelt sind, kann nach Integration unter Berücksichtigung der Anfangsbedingungen $r(0) = r_0$, $\alpha(0) = \alpha_0$

$$r(t) = r_0 e^{a_1 t} \quad (72)$$

$$\alpha(t) = a_2 t + \alpha_0 \quad (73)$$

die Trajektorie unmittelbar berechnet werden. Wir erhalten als Lösung

$$r(\alpha) = r_0 e^{\frac{a_1}{a_2}(\alpha - \alpha_0)} . \quad (74)$$

In Abhängigkeit vom Vorzeichen (+, ± 0 , -) der Parameter a_1, a_2 sind verschiedene Situationen zu unterscheiden.

1. Fall: $a_1 > 0, a_2 \neq 0 \implies$ instabiler Strudel
2. Fall: $a_1 < 0, a_2 \neq 0 \implies$ stabiler Strudel

Fig. 13: Schematische Darstellung der Fixpunkte eines zweidimensionalen dynamischen Systems.

- 3. Fall: $a_1 = 0, a_2 \neq 0 \implies$ Wirbel
- 4. Fall: $a_1 > 0, a_2 = 0 \implies$ instabiler Knoten
- 5. Fall: $a_1 < 0, a_2 = 0 \implies$ stabiler Knoten.

Zusammen mit dem Sattelpunkt sind diese Fixpunkte in der Abbildung 13 dargestellt.

5 Zwei oszillatorische dynamische Systeme

Untersuchen wir zuerst das elementare zweidimensionale dynamische System

$$\begin{aligned}\dot{x} &= -x + y \\ \dot{y} &= -x - y.\end{aligned}$$

Anschließend ist der Fluß im Zustandsraum für ein erweitertes Modellsystem

$$\begin{aligned}\dot{x} &= x - y - x(x^2 + y^2) \\ \dot{y} &= x + y - y(x^2 + y^2)\end{aligned}$$

zu analysieren, das in Beziehung zum van der Pol-Oszillator steht.

Das folgende in einem zweidimensionalen x - y -Zustandsraum „lebende“ lineare dynamische System

$$\dot{x} = -x + y \quad (75)$$

$$\dot{y} = -x - y. \quad (76)$$

ist auf Grund der Kopplung der beiden Gleichungen in kartesischen Koordinaten recht schwierig zu lösen. Deshalb führen wir eine Transformation auf Polarkoordinaten durch. Das Ziel besteht in der Entkopplung der beiden Gleichungen.

Unter Verwendung der Transformationsbeziehungen

$$x = r \cos \alpha \quad ; \quad r = \sqrt{x^2 + y^2} \quad (77)$$

$$y = r \sin \alpha \quad ; \quad \alpha = \arctan(y/x) \quad (78)$$

erhalten wir aus (75, 76) mittels

$$\dot{r} = \frac{\dot{x}x + \dot{y}y}{\sqrt{x^2 + y^2}} \quad (79)$$

$$= \frac{-x^2 + xy - xy - y^2}{\sqrt{x^2 + y^2}} \quad (80)$$

$$= -\sqrt{x^2 + y^2} = -r \quad (81)$$

$$\dot{\alpha} = \frac{\dot{y}x^{-1} - \dot{x}yx^{-2}}{1 + y^2x^{-2}} \quad (82)$$

$$= \frac{\dot{y}x - \dot{x}y}{x^2 + y^2} \quad (83)$$

$$= \frac{-x^2 - xy + xy - y^2}{x^2 + y^2} = -1 \quad (84)$$

das entkoppelte Gleichungssystem

$$\dot{r} = -r \quad (85)$$

$$\dot{\alpha} = -1. \quad (86)$$

Eine vollständige Lösung mittels elementarer Integration ist möglich. Die zum Anfangszustand ($r_0 = r(t_0)$; $\alpha_0 = \alpha(t_0)$) gehörende Trajektorie lautet

$$r(t) = r_0 \exp(-t) \quad (87)$$

$$\alpha(t) = -t + \alpha_0 \quad (88)$$

bzw.

$$r(\alpha) = r_0 \exp(\alpha - \alpha_0) . \quad (89)$$

Der Fluß im Zustandsraum (Abb. 14) zeigt das Einstrudeln aller Trajektorien zum Koordinatenursprung (0,0). Die Gleichung (89) beschreibt logarithmische Spiralen in Richtung auf den Ursprung. Das dynamische System (75, 76) entspricht physikalisch einem Pendel mit schwacher Reibung, wobei die Gleichgewichtslage ($x_{st} = 0, y_{st} = 0$) ein stabiler Strudelpunkt ist.

Das erweiterte Modellsystem

$$\dot{x} = x - y - x(x^2 + y^2) \quad (90)$$

$$\dot{y} = x + y - y(x^2 + y^2) \quad (91)$$

entkoppeln wir wiederum, indem wir die Transformation auf Polarkoordinaten durchführen. Wir erhalten nach analoger Rechnung

$$\dot{r} = r(1 - r^2) \quad (92)$$

$$\dot{\alpha} = 1 . \quad (93)$$

Aus der Gleichung (92) folgen zwei Fixpunkte, u.z.

$$r_{st}^{(0)} = 0 \quad (94)$$

$$r_{st}^{(1)} = 1 . \quad (95)$$

Die Integration der einfachen Bewegungsgleichungen (92, 93) ist elementar möglich. Nach Trennung der Variablen, Benutzung des Integrals

$$\int \frac{dx}{x(ax^2 + bx + c)} = \frac{1}{2c} \ln \frac{x^2}{ax^2 + bx + c} - \frac{b}{2c} \int \frac{dx}{ax^2 + bx + c} \quad (96)$$

mit $a = -1, b = 0, c = 0$, somit

$$\int \frac{dr}{r(1 - r^2)} = \frac{1}{2} \ln \frac{r^2}{1 - r^2} , \quad (97)$$

folgt nach Inversion die allgemeine Lösung (globaler Fluss)

$$r(t) = \left[1 + \left(\frac{1}{r_0^2} - 1 \right) e^{-2t} \right]^{-1/2} \quad (98)$$

$$\alpha(t) = \alpha_0 + t \quad (99)$$

bzw. als Trajektorie (Abb. 14)

Fig. 14: Fluss im Zustandsraum für das einfache System (links) und das erweiterte System (rechts) (Nobach, Mahnke, 1994).

$$r(\alpha) = \left[1 + \left(\frac{1}{r_0^2} - 1 \right) e^{-2(\alpha - \alpha_0)} \right]^{-1/2}. \quad (100)$$

Die Analyse zeigt, dass jede Trajektorie ($r_0 \neq 1$) für $t \rightarrow \infty$ dem Zustand $r_{st}^{(1)} = 1$ (95) zustrebt. Da der Winkel linear mit der Zeit anwächst (99), rotiert das System für lange Zeiten auf einem Kreis mit dem Radius $r = 1$. Somit ist der Koordinatenursprung als Fixpunkt (94) ein instabiler Strudel, während die stabile Lösung (95) einen Grenzyklus mit konstantem Radius (periodische Lösung) darstellt. Diese Situation beschreibt das Modell eines selbsterregten Schwingkreises, wie ihn der van der Pol-Oszillator darstellt.

6 Diskrete Abbildungen

Liegen die dynamischen Bewegungsgleichungen in der Form von Differenzgleichungen vor, so heißt

$$x_{n+1} = f(x_n) \quad (101)$$

eine (eindimensionale) nichtlineare diskrete Abbildung. Ausgehend von einem Anfangswert x_0 ist diese Iteration, häufig in Abhängigkeit von Kontrollparametern, zu lösen. Die Folge der Werte x_n ($n = 0, 1, 2, \dots$) zeigt neben regulärem in der Regel auch chaotisches Verhalten. Das bekannteste Beispiel einer diskreten Abbildung auf dem Einheitsintervall ist die logistische Gleichung

$$x_{n+1} = f(x_n) \quad \text{mit} \quad f(x) = rx(1-x) \quad \text{für} \quad 0 < r \leq 4, \quad (102)$$

die das berühmte Feigenbaum–Diagramm liefert.

Bereits im Jahre 1892 äußerte sich Poincaré erstmalig über die Möglichkeit irregulärer Bewegungen in mechanischen Systemen. Wir zitieren aus Poincaré „Wissenschaft und Methode“ aus dem Jahre 1914 (nach Leven, Koch, Pompe, 1989):

Eine sehr kleine Ursache, die für uns unbemerkt bleibt, bewirkt einen beträchtlichen Effekt, den wir unbedingt bemerken müssen, und dann sagen wir, dass dieser Effekt vom Zufall abhängt. Würden wir die Gesetze der Natur und den Zustand des Universums für einen gewissen Zeitpunkt genau kennen, so könnten wir den Zustand dieses Universums für irgendeinen späteren Zeitpunkt genau vorhersagen. Aber selbst wenn die Naturgesetze für uns kein Geheimnis mehr enthielten, können wir doch den Anfangszustand immer nur näherungsweise kennen. Wenn wir dadurch in den Stand gesetzt werden, den späteren Zustand mit demselben Näherungsgrade voraussagen, so ist das alles, was man verlangen kann; wir sagen dann: Die Erscheinung wurde vorausgesagt, sie wird durch Gesetze bestimmt. Aber so ist es nicht immer; es kann der Fall eintreten, dass kleine Unterschiede in den Anfangsbedingungen große Unterschiede in den späteren Erscheinungen bedingen; ein kleiner Irrtum in den ersteren kann einen außerordentlich großen Irrtum für die letzteren nach sich ziehen. Die Vorhersage wird unmöglich und wir haben eine 'zufällige Erscheinung'.

Lange Zeit war die Existenz chaotischer Attraktoren umstritten; sie erschienen als Kuriosität. Doch 1963 konnte E. Lorenz zeigen, dass bei der Modellierung der Atmosphäre mittels eines Satzes von drei nichtlinearen Differentialgleichungen (Lorenz–Gleichungen) chaotisches Lösungsverhalten auftritt;

ein Grund für die sprichwörtliche Unberechenbarkeit des Wetters. Numerische Analysen, mit Hilfe der heutigen Computertechnik schnell und einfach durchführbar, und theoretische Untersuchungen zeigen: Chaotische Bewegungen bilden keine Ausnahme. Wir sprechen heute vom „Deterministischen Chaos“, d. h. von irregulären Bewegungen auf Basis deterministischer Bewegungsgleichungen. Ursache der Irregularität in nichtlinearen dynamischen Systemen, sowohl kontinuierlichen als auch diskreten, ist die empfindliche Abhängigkeit der Dynamik von den Anfangsbedingungen, so dass benachbarte Trajektorien exponentiell schnell divergieren und langfristige Vorausberechnungen praktisch unmöglich werden.

Das exponentiell schnelle Divergieren benachbarter Trajektorien wird qualitativ mit Hilfe des Ljapunov-Exponenten erfaßt.

Wählen wir den Anfangswert x_0 aus einem kleinen ε -Intervall $[x, x + \varepsilon]$, so liegt nach n Iterationen das Bild $f^n(x_0)$ in einem Intervall der Länge

$$|f^n(x + \varepsilon) - f^n(x)| = |(f^n)'(x)| \varepsilon + O(\varepsilon). \quad (103)$$

Vergleichen wir nun diese allgemeine Abbildung f mit dem exponentiellen Wachstumsgesetz (lineare Abbildung) der Form

$$x_{k+1} = ax_k \quad \text{mit} \quad a = e^\lambda. \quad (104)$$

In diesem Fall wird das Intervall $[x, x + \varepsilon]$ nach n Iterationen auf ein Intervall der Länge

$$|e^{\lambda n}(x + \varepsilon) - e^{\lambda n}(x)| = e^{\lambda n} \varepsilon \quad (105)$$

abgebildet. Ermitteln wir nun abschließend den Grenzwert $\varepsilon \rightarrow 0$ und $n \rightarrow \infty$, so gilt

$$e^\lambda = \lim_{n \rightarrow \infty} |(f^n)'(x_0)|^{1/n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\prod_{k=0}^{n-1} |f'(x_k)| \right)^{1/n}. \quad (106)$$

Logarithmieren wir diese Zahl, so erhalten wir den Ljapunov-Exponenten

$$\lambda(x_0) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} \ln |f'(x_k)|, \quad (107)$$

der die mittlere logarithmische Ausdehnungsrate entlang einer Trajektorie, die am Anfangswert x_0 startete, angibt.

Bei der praktischen numerischen Berechnung der Ljapunov-Exponenten hat

Fig. 15: Skizze zur Illustration der Renormierungen einer Störung z in Bezug auf die Trajektorie $x(t)$ zur Bestimmung des größten Ljapunov-Exponenten (nach Leven, Koch, Pompe, 1989).

sich der Benettin – Algorithmus bewährt (Benettin et al., 1976). Zu beachten ist, dass der Einschwingvorgang (z.B. die ersten 300 Iterationen) das Ergebnis verfälschen können und deshalb nicht berücksichtigt werden sollten. Der Ausgangspunkt sind dann ein so gewonnener typischer Anfangszustand x_0 und eine beliebige Anfangsstörung z_0 in der Größenordnung 10^{-6} . Im chaotischen Fall wächst $|z_n|$ für große n im Mittel exponentiell, so dass sich numerische Probleme ergeben können. Durch das häufige Zurücksetzen (im zeitdiskreten Fall nach jeder Iteration) der benachbarten Trajektorie erfolgt eine ständige Renormierung der Störung (siehe Abbildung 15). Diese renormierten Divergenzraten konvergieren für lange Zeiten gegen den größten Ljapunov-Koeffizienten λ_1 (Nese, 1989).

7 Die logistische Gleichung

Untersuchen wir mit Hilfe numerischer und analytischer Methoden die bekannte nichtlineare diskrete Abbildung (logistische Gleichung)

$$x_{n+1} = rx_n(1 - x_n)$$

für den Kontrollparameterbereich $0 < r \leq 4$ und Anfangswerte aus dem Einheitsintervall $0 \leq x_0 \leq 1$. Berechnen wir insbesondere

1. das Zeitverhalten für verschiedene Parameterwerte r bei unterschiedli-

chen Anfangswerten x_0 ,

2. das Langzeitverhalten x für $n \rightarrow \infty$ bei verschiedenen Parameterwerten r ,
3. eine Darstellung x über r (Feigenbaum–Diagramm),
4. die Fixpunkte und ihren Stabilitätskoeffizienten λ (Ljapunov–Exponent),
5. die ersten periodischen Lösungen (2er Zyklus) und ihre Stabilität,
6. den kritischen Kontrollparameter r_∞ für den Übergang zum Chaos und
7. das voll entwickelte Chaos bei dem Parameterwert $r = 4$.

Das berühmte Modellbeispiel einer eindimensionalen nichtlinearen diskreten Abbildung ist die logistische Gleichung

$$x_{n+1} = rx_n(1 - x_n) \quad (108)$$

mit einem Kontrollparameter r im Wertebereich $0 < r \leq 4$. Diese Iteration wurde erstmalig 1845 vom belgischen Biomathematiker P. F. Verhulst in einer Arbeit zur Populationsdynamik eingeführt (Französisch: Logis = Haus, Quartier). Die logistische Abbildung läßt sich aus einem einfachen nichtlinearen Wachstumsgesetz, bestehend aus einem linearen Term und einer quadratischen Dämpfung

$$y_{n+1} = f(y_n) = ry_n - sy_n^2, \quad (109)$$

herleiten. Die variable Größe y_n können Populationszahlen, die Höhe des Sparguthabens oder ähnliches für das Jahr n ($n \geq 0$) sein.

Ein wichtiger Grenzfall ist das lineare Wachstum ($s = 0$). Falls nur eine geringe Populationsmenge (y_n klein) vorhanden ist, so erfolgt ein unbeeinträchtigtetes Wachstum, allein determiniert durch die Nettoproduktionsrate $r > 0$.

Falls $p_{n+1} \simeq rp_n$ (lineares Wachstumsgesetz, 104) gilt, dann ist die Lösung als exponentielle Dynamik bekannt:

Fig. 16: Nichtlineare logistische Wachstumsfunktion $f(x) = rx(1 - x)$ für $r = 4$.

$$p_n = p_0 r^n \quad : \quad \text{exponentielle Dynamik}$$

$$r < 1 : p_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0 \quad : \quad \text{Aussterben der Population}$$

$$r = 1 : p_n = p_0 \quad : \quad \text{Stagnation}$$

$$r > 1 : p_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \infty \quad : \quad \text{Bevölkerungsexplosion}$$

Betrachten wir nun wiederum den vollständigen Ansatz (109) für die nicht-lineare Populationsdynamik in Abhängigkeit von den Parametern r und s , so können wir durch eine Variablentransformation die logistische Gleichung unter Verwendung genau eines Kontrollparameters r herleiten. Es gilt

$$x_n = \frac{s}{r} y_n \quad \iff \quad y_n = \frac{r}{s} x_n \quad (110)$$

$$y_{n+1} = r y_n - s y_n^2 \quad (111)$$

$$\frac{r}{s} x_{n+1} = r \frac{r}{s} x_n - s \frac{r^2}{s^2} x_n^2 \quad (112)$$

$$x_{n+1} = r x_n - r x_n^2 = r(x_n - x_n^2) \quad (113)$$

$$x_{n+1} = r x_n (1 - x_n) \quad \text{Logistische Abbildung} \quad (114)$$

Zu dieser diskreten Abbildung (siehe Abb. 16) mit einem Kontrollparameter $0 < r \leq 4$ gehört ein Anfangswert x_0 im Einheitsintervall $0 < x_0 < 1$ (ansonsten sind negative Populationszahlen möglich).

Der Algorithmus für die iterative Lösung der logistischen Abbildung lautet wie folgt:

- Fixiere Kontrollparameter: r ($r = 0.5$)

- Wähle beliebigen Startwert: x_0 ($x_0 = 0.1$)
- Trage x_n über n auf: x_1, x_2, \dots (geht schnell gegen 0)
- Konvergiert die Folge x_n gegen Grenzwert? : x ($x = 0$)
- Trage Grenzwert (bzw. Grenzwerte) über r auf.

Als Resultat erhält man das Feigenbaum–Diagramm.

Vorschlag für die Durchführung eines Computerexperimentes:

1. $r = 0.5$; $x_0 = 0.5$, $x_0 = 0.1$, $x_0 = 0.9$
nach wenigen Iterationen Konvergenz gegen $x = 0$
2. $r = 0.95$; $x_0 = 0.5$, $x_0 = 0.9$
erheblich langsamere Konvergenz gegen $x = 0$
3. $r = 1$; $x_0 = 0.5$, $x_0 = 0.001$
„Unendliche langsame“ Konvergenz gegen Null
4. $r = 1.2$; $x_0 = 0.001$
 x_n entfernt sich langsam vom Wert Null und konvergiert gegen $x = 0.16666\dots = 1/6$
5. $r = 2$; $x_0 = 0.001$
„superschnelle“ Konvergenz gegen $x = 0.5$
6. $r = 3.2$; $x_0 = 0.001$
→ stabiler 2–Zyklus: Bifurkation bei $r = 3$
7. $r = 3.5$; $x_0 = 0.5$
→ 4–Zyklus: $x = (0.8269 ; 0.5009 ; 0.8750 ; 0.3828)$
 2^k –Zyklen entstehen
8. $r = 4$, $x_0 = 0.0001$; $x_0 = 0.0002$; $\Delta x_0 = 10^{-4}$
→ voll entwickeltes Chaos
→ Lösungen divergieren exponentiell

Auf dem Computer könnte ein Programm zur Erstellung des Feigenbaum–Diagramms wie folgt aussehen:

1. Teile Wertebereich von r in I gleiche Abschnitte:
 $\Delta r = (r_{end} - r_{start})/I$
2. Wähle Startwert, z.B. $x_0 = 0.5$
3. Setze r mit $r := r_{start} + i\Delta r$ ($i = 0, 1, 2, 3, \dots, I$)
4. Führe Iterationen $x_{n+1} = rx_n(1 - x_n)$ aus
5. Trage die Iterationswerte x_n für große n (z.B. Ergebnisse der Zeitraumes $300 \leq n \leq 400$) auf, dieses liefert die Fixpunkte x
 Gehe zu 3.
6. Bringe alles in eine Darstellung x über r und das Feigenbaum – Diagramm (siehe Abbildung 17) entsteht

Im Jahre 1978 wurde erstmalig durch M. Feigenbaum das Verhalten des Systems „Logistische Abbildung“ (108) für lange Zeiten ($n \rightarrow \infty$) als Funktion des Kontrollparameters r dargestellt. Die Abbildung 17 zeigt das Resultat.

Die analytische Berechnung des Langzeitverhaltens des Systems erfordert die Kenntnis der Fixpunkte x , wobei für ein diskretes System analog zur dynamischen Gleichung $\dot{x} = f(x)$ die folgende Definition

x heißt Fixpunkt, wenn $x = f(x)$ gilt

existiert.

Die Berechnung der Fixpunkte x für die logistische Abbildung führt auf eine quadratische Gleichung

$$rx^2 + x(1 - r) = 0 \quad (115)$$

mit den Lösungen

$$x^{(1)} = 0 \quad \text{und} \quad x^{(2)} = 1 - \frac{1}{r}. \quad (116)$$

Berechnen wir nun die Stabilität der Fixpunkte, in dem wir das Verhalten von kleinen Störungen Δx_n in der Nähe der Fixpunkte mit Hilfe der ersten Ableitung untersuchen.

Wir betrachten zwei benachbarte Punkte (Trajektorien) x_n ; $y_n = x_n + dx_n$

Fig. 17: Das berühmte Feigenbaum–Diagramm für die logistische Abbildung (oben) einschließlich einer Darstellung des Ljapunov–Exponenten für die Parameterwerte $0 < r \leq 4$ (Nobach, Mahnke, 1994).

und nehmen eine Taylorentwicklung vor:

$$y_{n+1} \equiv x_{n+1} + dx_{n+1} = f(y_n) = f(x_n + dx_n) \quad (117)$$

$$x_{n+1} + dx_{n+1} \approx f(x_n) + f'(x_n)dx_n \quad (118)$$

$$dx_{n+1} = f'(x_n)dx_n \equiv \mu_n dx_n, \quad (119)$$

wobei

$$\mu_n = |f'(x_n)| = \begin{cases} > 1 & \text{Expansionsrate (instabil)} \\ < 1 & \text{Kompressionsrate (stabil)} \end{cases} \quad (120)$$

Bei einer exponentiellen Dynamik

$$dx_{n+1} = \mu dx_n \rightarrow dx_n = \mu^n dx_0 = e^{\lambda n} dx_0 \quad (121)$$

gilt mit $e^\lambda = \mu$ für den Ljapunov-Exponenten

$$\lambda = \ln \mu = \begin{cases} > 0 & \text{Instabilität} \\ < 0 & \text{Stabilität} . \end{cases} \quad (122)$$

Wegen (119) lautet im allgemeinen Fall $dx_n = dx_0 \prod_{i=0}^{n-1} \mu_i = dx_0 e^{\lambda n}$ der Ljapunov-Exponent wie folgt

$$\lambda = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{i=0}^{n-1} \ln \mu_i = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{i=0}^{n-1} \ln |f'(x_i)| . \quad (123)$$

Nach Berechnung der ersten Ableitung für die logistische Abbildung

$$\lambda = \ln \mu = \ln |f'(x)| = \ln |r(1 - 2x)| \quad (124)$$

an den Fixpunkten (116) folgt somit

$$\lambda^{(1)} = \ln [r|(1 - 2x^{(1)})|] = \ln r \quad (125)$$

$$\lambda^{(2)} = \ln [r|(1 - 2x^{(2)})|] = \ln [r|1 - 2 + 2/r|] = \ln |2 - r| . \quad (126)$$

Die Fixpunkte sind stabil für $\lambda < 0$ bzw. $\mu < 1$, d. h. kritische Werte des Kontrollparameters sind:

$$r_{cr}^{(1)} = 1 \rightarrow \text{Umschlag der Stabilität von } x^{(1)} = 0 \\ \text{nach } x^{(2)} = 1 - 1/r, \quad (127)$$

$$r_{cr}^{(2)} = 3 \rightarrow \text{Verlust der Stabilität von } x^{(2)}. \quad (128)$$

Somit erhalten wir das folgende Resultat (siehe Abb. 17, 18):

$$x^{(1)} = 0 \quad \text{ist stabil für } 0 < r \leq 1 \text{ mit } \lambda^{(1)} = \ln r \quad (129)$$

$$x^{(2)} = 1 - 1/r \text{ ist stabil für } 1 < r \leq 3 \text{ mit } \lambda^{(2)} = \ln |2 - r|. \quad (130)$$

Fig. 18: Darstellung des Stabilitätskoeffizienten λ (Ljapunov-Exponent) über dem Kontrollparameter r im Intervall $3.62 < r < 3.65$ (oben). Ausschnitt des zugehörigen Feigenbaum-Diagramms (unten) zum Vergleich (Nobach, Mahnke, 1994).

Neben den Fixpunkten (stationäre Zustände) existieren bei der logistischen Abbildung periodische Lösungen (2^k -Zyklen: $k = 1, 2, 3, \dots$), d. h. beim Langzeitverhalten pendelt die Variable x_n ständig zwischen 2^k Werten.

Wir untersuchen den einfachsten Fall eines 2er-Zyklus. Die Fixpunktgleichung lautet dann allgemein

$$x = f(f(x)) \equiv f^{(2)}(x) \quad (131)$$

und speziell in unseren Fall wegen

$$x_{n+2} = rx_{n+1}(1 - x_{n+1}) = r^2x_n(1 - x_n)(1 - rx_n(1 - x_n)) \quad (132)$$

gilt

$$x = r^2x(1 - x)(1 - rx(1 - x)) . \quad (133)$$

Wir formen die Gleichung um und erhalten

$$0 = x [r^2(1 - x)(1 - rx + rx^2) - 1] , \quad (134)$$

so dass wir die erste stationäre Lösung $x^{(1)} = 0$ (129) abspalten können

$$0 = r^2(1 - x)(1 - rx + rx^2) - 1 . \quad (135)$$

Analog verfahren wir mit dem zweiten bekannten Fixpunkt (130). Dazu bringen wir die Gleichung (135) in die folgende Form

$$\left[x - \left(1 - \frac{1}{r} \right) \right] \left[x^2 - \left(1 + \frac{1}{r} \right) x + \frac{1}{r} \left(1 + \frac{1}{r} \right) \right] = 0 , \quad (136)$$

spalten die Lösung $x^{(2)} = 1 - 1/r$ (130) ab und erhalten aus einer quadratischen Gleichung $x^2 + px + q = 0$ die ersten beiden periodischen Lösungen

$$x^{(3),(4)} = \frac{1}{2} \left(1 + \frac{1}{r} \right) \pm \sqrt{\frac{1 + 2/r + 1/r^2}{4} - \frac{1}{r} \left(1 + \frac{1}{r} \right) \frac{4}{4}} \quad (137)$$

$$= \frac{1}{2} \left(1 + \frac{1}{r} \right) \pm \frac{1}{2} \sqrt{1 + \frac{2}{r} + \frac{1}{r^2} - \frac{4}{r} - \frac{4}{r^2}}$$

$$= \frac{1}{2} \left(1 + \frac{1}{r} \right) \pm \frac{1}{2} \sqrt{1 - \frac{2}{r} - \frac{3}{r^2}}$$

$$x^{(3),(4)} = \frac{1}{2} \left(1 + \frac{1}{r} \right) \pm \frac{1}{2r} \sqrt{r^2 - 2r - 3} . \quad (138)$$

$x^{(3),(4)}$ (138) ist die erste periodische Lösung; sie ist stabil ab $r = 3$.
Für den Ljapunov-Exponenten

$$\lambda^{(3),(4)} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{2n} \sum_{i=0}^{n-1} \ln |f^{(2)'}(x_i)| \quad (139)$$

erhalten wir mit

$$f(x) = rx(1-x) \quad ; \quad f'(x) = r(1-2x) \quad (140)$$

$$f'(x^{(3)}) = r \left(1 - \left(1 + \frac{1}{r} \right) - \frac{1}{r} \sqrt{r^2 - 2r - 3} \right) \quad (141)$$

$$= - \left(1 + \sqrt{r^2 - 2r - 3} \right) \quad (142)$$

$$f'(x^{(4)}) = r \left(1 - \left(1 + \frac{1}{r} \right) + \frac{1}{r} \sqrt{r^2 - 2r - 3} \right) \quad (143)$$

$$= - \left(1 - \sqrt{r^2 - 2r - 3} \right) \quad (144)$$

somit

$$\lambda^{(3),(4)} = \frac{1}{2} \ln |f'(x^{(3)})f'(x^{(4)})| \quad (145)$$

$$= \frac{1}{2} \ln \left| \left(1 + \sqrt{r^2 - 2r - 3} \right) \left(1 - \sqrt{r^2 - 2r - 3} \right) \right| \quad (146)$$

$$= \frac{1}{2} \ln |1 - (r^2 - 2r - 3)| \quad (147)$$

$$= \frac{1}{2} \ln | -r^2 + 2r + 4 | . \quad (148)$$

Die kritischen Parametergrenzen folgen aus

$$\begin{aligned} -r^2 + 2r + 4 = -1 & \rightarrow r^2 - 2r - 4 - 1 = 0 \\ & \rightarrow r_{cr} = 1 \pm \sqrt{1+5} = 1 + \sqrt{6} \end{aligned} \quad (149)$$

$$\begin{aligned} -r^2 + 2r + 4 = +1 & \rightarrow r^2 - 2r - 4 + 1 = 0 \\ & \rightarrow r_{cr} = 1 \pm \sqrt{1+3} = 3 \end{aligned} \quad (150)$$

$$\begin{aligned} r^2 - 2r - 4 = 0 & \rightarrow r = 1 \pm \sqrt{1+4} \\ & \rightarrow r = 1 + \sqrt{5} \quad (\text{Symmetrieachse}) , \end{aligned} \quad (151)$$

somit gilt

$$x^{(3),(4)} \quad \text{ist stabil für} \quad 3 < r \leq 1 + \sqrt{6} . \quad (152)$$

Zusammenfassend liefert die Fixpunkt- und Stabilitätsanalyse (Ljapunov-Koeffizient λ) der logistischen Gleichung folgende Resultate:

$$\begin{array}{ll}
x^{(1)} = 0 & \text{stabil f\u00fcr } 0 < r \leq 1 ; \quad \lambda^{(1)} = \ln |r| \\
x^{(2)} = 1 - 1/r & \text{stabil f\u00fcr } 1 < r \leq 3 ; \quad \lambda^{(2)} = \ln |2 - r| \\
x^{(1)}, x^{(2)} & : \text{ stabile Fixpunkte}
\end{array}$$

$$\begin{array}{l}
x^{(3),(4)} = \frac{1}{2} \left(1 + \frac{1}{r} \right) \pm \frac{1}{2r} \sqrt{r^2 - 2r - 3} \\
\text{stabil f\u00fcr } 3 < r \leq 1 + \sqrt{6} ; \quad \lambda^{(3),(4)} = \frac{1}{2} \ln | -r^2 + 2r + 4 | \\
x^{(3),(4)} : \text{ stabile periodische L\u00f6sung (2er-Zyklus)}
\end{array}$$

Weitere analytische Berechnungen sind sehr aufwendig. Man erh\u00e4lt numerisch eine Serie von Bifurkationen. Die ersten Periodenverdopplungen liegen bei den folgenden Parameterwerten r_k (dort starten 2^k - Zyklen):

$$\begin{array}{llll}
r_1 = 3 ; & r_2 = 1 + \sqrt{6} = 3.449499 ; & r_3 = 3.544090 \\
r_4 = 3.564407 ; & r_5 = 3.568759 ; & r_6 = 3.569692 \\
r_7 = 3.569891 ; & r_8 = 3.569934 ; & \dots
\end{array}$$

Es existiert ein Grenzwert r_∞ , bei dem der \u00dcbergang ins Chaos erfolgt.

Betrachten wir im Vergleich das station\u00e4re, periodische und chaotische Verhalten der logistischen Abbildung:

a) **Station\u00e4res Regime** $[0, r_1 = 3]$

$$\begin{array}{ll}
0 < r < r_0 = 1 & \text{stabiler Fixpunkt } x^{(1)} = 0 \quad (129) \\
1 = r_0 < r < r_1 = 3 & \text{stabiler Fixpunkt } x^{(2)} \neq 0 \quad (130)
\end{array}$$

b) **Periodisches Regime** $[r_1 = 3, r_\infty]$

$$\begin{array}{ll}
r_1 < r < r_2 & \text{stabiler Orbit der Periode 2} \quad (138) \\
r_2 < r < r_3 & \text{stabiler Orbit der Periode 4} \\
\vdots & \\
r_n < r < r_{n+1} & \text{stabiler Orbit der Periode } 2^n \\
\vdots & \\
r = r_\infty & \text{stabile (aperiodische) Bahn der Periode } 2^\infty \rightarrow \infty
\end{array}$$

Die Bifurkationswerte r_k folgen einer geometrischen Reihe mit $r_k = r_1 q^{k-1}$; $r_{k+1} = r_k q$, d. h. das Skalenverhalten ist vom Typ

$$r_k \approx r_\infty - c \hat{F}^{-k}, \quad c = 2.6327 \quad (153)$$

$$\hat{F} = \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{r_{k+1} - r_k}{r_{k+2} - r_{k+1}} \quad (154)$$

$$= 4.669202 : \text{ universelle Feigenbaum-Konstante} \quad (155)$$

Bestimmen wir r_∞ als kritischen Kontrollparameter für den Übergang zum Chaos:

$$r_k = r_\infty - c\hat{F}^{-k} \quad (156)$$

$$r_{k+1} = r_\infty - c\hat{F}^{-(k+1)} \quad (157)$$

$$r_\infty = r_{k+1} + c\hat{F}^{-k}\hat{F}^{-1} = r_{k+1} + (r_\infty - r_k)\hat{F}^{-1} \quad (158)$$

$$r_\infty\hat{F} = r_{k+1}\hat{F} + r_\infty - r_k \quad (159)$$

$$r_\infty(\hat{F} - 1) = \hat{F}r_{k+1} - r_k \quad (160)$$

$$r_\infty = \frac{\hat{F}r_{k+1} - r_k}{\hat{F} - 1} = 3.5699456 \quad (161)$$

Beim Parameterwert $r_\infty \approx 3.57$ erfolgt der Übergang in den Chaos-Bereich.

c) Chaotisches Regime $[r_\infty, 4]$

Der chaotische Bereich hat periodische Fenster, sogenannte „Fenster der Ordnung im Meer des Chaos“. Diese r -Fenster sind charakterisiert durch Zyklen der Periodenlänge 3, 5, 6, ... und weiterer Bifurkationen. Das chaotische Intervall vergrößert sich mit steigendem r , wobei die Iterationen bei $r = 4$ den gesamten Wertebereich $[0, 1]$ überdecken. Wir sprechen dann bei $r = 4$ vom „voll entwickelten Chaos“.

Bei $r = r'_\infty = r_\infty$ beginnt der chaotische Bereich.

⋮

Für $r'_{n+1} < r < r'_n$ werden 2^n Intervalle nacheinander besucht.

⋮

Für $r'_2 < r < r'_1$ werden 2 Intervalle nacheinander besucht.

Für $r'_1 < r < r'_0 = 4$ existiert nur ein Aufenthaltsintervall maximaler Größe.

Im chaotischen Regime $[r_\infty, 4]$ existiert eine inverse Kaskade von Bifurkationen analog dem Feigenbaum – Szenario für den Bereich $[0, r_\infty]$. Die Abbildung 19 zeigt dieses schematisch.

Bei dem Parameterwert $r = 4$ haben wir ein exakt lösbares Modell, das chaotisches Verhalten zeigt, u. z.

$$x_{n+1} = 4x_n(1 - x_n) . \quad (162)$$

Obwohl bei $r = 4$ eine typische Trajektorie im gesamten Intervall $[0, 1]$ ziellos umherirrt, kann doch überraschenderweise die logistische Abbildung (162)

Fig. 19: Bifurkationskaskade im Bereich $r < r_\infty$ und ihr inverses Analogon für $r > r_\infty$ (nach Schuster, 1989).

durch eine Variablentransformation analytisch gelöst werden. Verwenden wir die folgende Transformation

$$x_n = \frac{1}{2} [1 - \cos(2\pi y_n)] \equiv h(y_n) , \quad (163)$$

so erhalten wir aus (162) mittels

$$\frac{1}{2} [1 - \cos(2\pi y_{n+1})] = \frac{4}{2} [1 - \cos(2\pi y_n)] [1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \cos(2\pi y_n)] \quad (164)$$

$$= [1 - \cos(2\pi y_n)] [1 + \cos(2\pi y_n)] \quad (165)$$

$$= 1 - \cos^2(2\pi y_n) \quad (166)$$

$$= 1 - \frac{1}{2} [1 + \cos(4\pi y_n)] \quad (167)$$

$$= \frac{1}{2} [1 - \cos(4\pi y_n)] \quad (168)$$

das Resultat

$$\frac{1}{2} [1 - \cos(2\pi y_{n+1})] = \frac{1}{2} [1 - \cos(4\pi y_n)] \quad (169)$$

mit der Lösung

$$y_{n+1} = 2y_n \pmod{1} \quad \text{bzw.} \quad y_n = 2^n y_0 \pmod{1} . \quad (170)$$

Einsetzen in (163) liefert

$$x_n = \frac{1}{2} [1 - \cos(2\pi 2^n y_0)] = \sin^2(\pi 2^n y_0) , \quad (171)$$

wobei wegen $x_0 = \frac{1}{2}[1 - \cos(2\pi y_0)] = \sin^2(\pi y_0)$ für den Startwert y_0 gilt

$$y_0 = \frac{1}{2\pi} \arccos(1 - 2x_0) = \frac{1}{\pi} \arcsin \sqrt{x_0} . \quad (172)$$

Die elementare Lösungsfunktion lautet somit

$$x_n = \sin^2(2^n \arcsin \sqrt{x_0}) , \quad (173)$$

wobei $0 < x_0 < 1$ eine rationale bzw. irrationale Startzahl $x_0 = q/p$ (q, p - ganzzahlig) sein kann. Diese führt zu unterschiedlichen Konsequenzen, so liefern rationale Startzahlen Fixpunkte und periodische Zahlenfolgen, z. B.

$$\begin{array}{ll} x_0 = 0 & \rightarrow x = 0 \\ x_0 = \frac{1}{3} & \rightarrow x = \frac{3}{4} \\ x_0 = \frac{1}{5} & \rightarrow 2\text{er Zyklus } x = (5 \pm \sqrt{5})/8 \\ x_0 = \frac{1}{7} & \rightarrow 3\text{er Zyklus ,} \end{array}$$

während irrationale Startwerte chaotisches Umherirren der Trajektorie produzieren. Der Ljapunov-Exponent hat für $r = 4$ den Wert $\lambda = \ln 2$.

Abschließend sei auf folgende Fragen hingewiesen:

- Was hat das Ganze mit Physik zu tun?
 - ↔ Konzepte, Methoden sind nützlich für viele Fragestellungen aus der Biologie, Medizin, ...
- Hat die logistische Gleichung physikalische Relevanz?
 - ↔ Es ist zwar „nur“ eine Modellgleichung für nichtlineare Systeme, aber sie zeigt alles Typische für diskrete nichtlineare Systeme, so die Bifurkationskaskade für den Weg zum Chaos (Feigenbaum-Szenario), die sensitive Abhängigkeit von der Änderung der Anfangsbedingungen u.v.a.m.
- Was kann man analytisch berechnen?
 - ↔ Insbesondere das Langzeitverhalten und seine Stabilität.

Es dauerte aber immerhin ca. 10 Jahre, ein solch „einfaches“ Modell wie die logistische Gleichung vollständig zu verstehen.