
Grundlagen der Theoretischen Mechanik für das Lehramt

(Lehramt an Gymnasien &
Lehramt an Regionalen Schulen)

Priv.-Doz. Dr. Reinhard Mahnke
Institut für Physik

Lehrveranstaltung Nr. 12558
(Wintersemester 2014/15: 2 SWS V + 1 SWS Ü)

V: Dienstag 9.15 bis 10.45 Uhr, Sem.Raum I, Inst. f. Physik
Ü: Freitag 11.15 bis 12.45 Uhr, Sem.Raum I, Inst. f. Physik
ungerade Woche, erstmalig am 24.10.2014

Die Lehrveranstaltung begann als Einführungsvorlesung
für alle am Dienstag, d. 14.10.2014, 9.15 bis 10.45 Uhr
im Seminarraum I des Instituts für Physik am
Universitätsplatz 3.

Literaturhinweise:

1. Franz Embacher: Elemente der theoretischen Physik, Band 1: Klassische Mechanik, LA-Studium Physik
2. Achim Feldmeier: Theoretische Mechanik (Springer, 2013)
3. Studienbücherei Physik für Lehrer, Bd. 2: Einführung in die Physik. Mechanik (Berlin, 1980)

Studiengangsspezifischen Prüfungs- und Studienordnung für den Studiengang Lehramt an Gymnasien bzw. an Regionalen Schulen (RPO-LA)

Aus der Anlage 4.14: Fachanhang Physik einschließlich Atronomie

Grundlagen der Theoretischen Mechanik für das Lehramt

Pflichtmodul

3 Leistungspunkte (LP)

jedes Wintersemester

3. Semester

Teilnahmevoraussetzung: Modul Mathematische Methoden für das Lehramt

Als zusätzliche Prüfungsvorleistung kann außer den in der RPO-LA genannten das erfolgreiche Lösen von Übungsaufgaben verlangt werden. Das Lösen von Übungsaufgaben dient der Überprüfung des Leistungsstandes der/des Studierenden auch während der Vorlesungszeit und erfolgt in der Regel ohne Aufsicht.

Prüfungsterminplanung:

Abschlussklausur am 19. Februar 2015 (Do), 13.30 – 15.00 Uhr, Großer Hörsaal im Institut für Physik

Inhaltsverzeichnis

1	Einleitung	5
2	Nichtlineare Dynamik und Chaosforschung	6
3	Klassifikation dynamischer Systeme	10
4	Stabilitätsanalyse dynamischer Systeme	18
5	Zwei oszillatorische dynamische Systeme	23
6	Das mathematische Pendel	26
7	Diskrete Abbildungen	34
8	Die logistische Gleichung	36
9	Selbstähnlichkeit und Fraktale	50
10	Nichtlinearität 3. Grades	54
11	Koch-Kurve	58
12	Theoretische Mechanik: Newton'sche Formulierung	63
13	Theoretische Mechanik: Lagrange'sche Formulierung	66
14	Theoretische Mechanik: Hamilton'sche Formulierung	67

15 Einführung in die Straßenverkehrsphysik	67
16 Hinweis auf stochastische Dynamik	68

1 Einleitung

1. **Überblick** (14.10.2014, R. Mahnke)

Klassische Mechanik beschreibt deterministische Bewegungen mittels

- Newtonscher Bewegungsgleichung: Kraft gegeben, Bahnkurve gesucht
- Euler-Lagrange-Gleichung (Lagrange II): Lagrange-Funktion geg.
- Hamiltonsche Gleichungen: Hamilton-Funktion geg.
- Liouville-Gleichung im Phasenraum: Phasenraumdynamik, z. B. des mathematischen Pendels

Zwei klassische lösbare Probleme der Mechanik sind

- harmonischer Oszillator (lineare rücktreibende Kraft)
- Kepler-Problem (Zentralkraftbewegung)

2. **Deterministisches Chaos** (14.10.2013, R. Mahnke)

Aber es gibt mehr: die *Theorie (nichtlinearer) dynamischer Systeme*, beinhaltet die klassische Mechanik. Neben den regulären Bahnkurven existieren auch irreguläre deterministische Bewegungen, genannt deterministisches Chaos mit seiner sensitiven Abhängigkeit von den Anfangsbedingungen.

Beispiel: Logistische Abbildung

$$x(t+1) = rx(t)(1-x(t))$$

3. **Der Zufall: Stochastische Prozesse** (14.10.2013, R. Mahnke)

Physik stochastischer Prozesse (gehört im engeren Sinne nicht zur klassischen Mechanik) liefert Wahrscheinlichkeitsaussagen.

Beispiel: Zufallswanderer (Galton-Brett)

$$P(m, n+1) = pP(m-1, n) + qP(m+1, n)$$

Das Ergebnis (die Lösung) ist eine Wahrscheinlichkeit $P(m, n) = \dots$, die eine Binominalverteilung ist.

Folgende Kap. 2 bis 4 aus:

R. Mahnke, *Nichtlineare Physik in Aufgaben*, Teubner, 1994.

Die Abbildungen wurden bewusst weggelassen.

2 Nichtlineare Dynamik und Chaosforschung

Nichtlineare Phänomene und die aus Nichtlinearitäten resultierenden Möglichkeiten und Formen der Strukturbildung, der Selbstorganisation und der kooperativen Effekte sind in den letzten 20 – 30 Jahren verstärkt in den Blickpunkt der wissenschaftlichen Analyse gerückt. Die Resultate dieser Analyse sind vielfältig, zum Teil ungewohnt und beeinflussen praktisch alle Wissensbereiche in einem Maße, dass sie darüber hinaus in der breiten Öffentlichkeit auf zunehmendes Interesse stossen. Als einige Stichwörter in diesem Zusammenhang seien solche Begriffe wie *dissipative Strukturen*, *Synergetik*, *Bifurkationstheorie*, *Chaos in deterministischen Systemen*, *Fraktale*, *Spingläser* und *Mustererkennung* genannt.

Bei der Analyse hat sich herausgestellt, dass zum Teil unabhängig von den Spezifika der untersuchten Systeme – ob in der Physik, Chemie, Biologie oder auch im Bereich der Soziologie – bei Existenz bestimmter Bedingungen qualitativ gleichartige Phänomene zu beobachten sind. Dies gibt die Möglichkeit, ausgehend von relativ einfachen Modellsystemen allgemeine Verhaltensweisen nichtlinearer Systeme zu studieren. Die Resultate können dann zumindest als Denkmöglichkeiten zur Untersuchung komplexer Systeme herangezogen werden und die bisher weitgehend an Verhaltensweisen linearer Systeme geschulte Intuition erweitern.

Die faszinierenden Effekte und Eigenschaften nichtlinearer dynamischer Systeme werden zumeist an einfachen Modellbeispielen studiert und sich darauf aufbauend den realen Systemen in der Natur und Technik genähert.

Das bekannteste Modellbeispiel der nichtlinearen Dynamik ist ein diskreter Rückkopplungsmechanismus vom Typ $x_{n+1} = rx_n(1 - x_n)$. Diese sogenannte logistische Gleichung (eine Iteration mit einem Kontrollparameter r) wurde erstmalig 1845 vom belgischen Biomathematiker P. F. Verhulst in einer Arbeit zur Populationsdynamik eingeführt. Die Resultate der Analyse dieses einfachen Systems wurde 1978 durch M. Feigenbaum veröffentlicht und zeigen den Übergang von der geordneten Bewegung in das Chaos.

Weitere Beispiele für den Übergang von stabilen zu instabilen Situationen bei Variation eines oder mehrerer Kontrollparameter sowohl in konservativen als auch dissipativen Systemen sind das angeregte Pendel, das 3-Körper-Problem, nichtlineare Wellen, strömende Flüssigkeiten und Gase, chemische Reaktionen, Teilchenbeschleuniger, biologische Modelle der Populationsdynamik wie z. B. das Räuber-Beute-System, astrophysikalische Objekte. So

zeigen Ringe des Planeten Saturn mit der Cassini-Lücke die Struktur von stabilen und instabilen Orbits.

Viele Fragen berühren die Zeitreihenanalyse. Kann aus der Kenntnis einer Datenfolge (experimentelle Werte) auf die inneren nichtlinearen dynamischen Gesetzmäßigkeiten (chaotische Dynamik) geschlossen werden?

Physikalische Gesetzmäßigkeiten werden durch mathematische Gleichungen ausgedrückt. Insbesondere wird die zeitliche Entwicklung dynamischer Systeme durch nichtlineare Bewegungsgleichungen festgelegt. Die Aussagekraft physikalischer Theorien hat sich sowohl im makroskopischen Bereich außerordentlich bewährt – es sei als klassisches Beispiel auf die Vorhersagbarkeit der Bewegung der Planeten verwiesen –, sie geben aber auch das Verhalten im mikroskopischen Bereich präzise wieder – hier kann auf die Erfolge bei der Beschreibung der Eigenschaften von Molekülen und Festkörpern, der Atomkerne und Elementarteilchen verwiesen werden. Es ergibt sich die Frage, ob sich das Verhalten komplizierter Systeme, einschließlich der belebten Natur, auf der Grundlage der uns bekannten physikalischen Gesetzmäßigkeiten vorhersagen läßt.

Systeme aus vielen Teilchen mit vorgegebenen Wechselwirkungen wurden in letzter Zeit intensiv untersucht. Hierbei wurden eine Reihe neuer, hochinteressanter Ergebnisse erhalten. Für die beachtlichen Erfolge dieser Forschung zur Theorie nichtlinearer, komplexer Systeme war die moderne Rechentechnik von besonderer Bedeutung. Durch die numerische Lösung der Bewegungsgleichungen eines Systems aus vielen Teilchen konnten die Bahnkurven der Teilchen berechnet werden (Molekulardynamik). Neue Begriffe wurden eingeführt, um das Verhalten solcher nichtlinearer Systeme zu analysieren und zu beschreiben. Es wurden teilweise auch völlig unerwartete Ergebnisse gefunden, die sowohl die experimentelle physikalische Forschung, aber auch ganz andere Wissenschaftsdisziplinen befruchtet haben.

Ein System zeigt dann ein lineares Verhalten, wenn durch kleine äußere Einwirkungen auch nur kleine Änderungen in den physikalischen Eigenschaften resultieren, wenn Ursache und Wirkung einander proportional sind (starke Kausalität). Wenn die äußere Einwirkung (Kontrollparameter) einen Schwellwert übersteigt, kann das System „umkippen“, es verläßt seinen ursprünglichen Zustand und geht in ein neues Regime über. Diese Nichtlinearität äußert sich in dem Auftreten völlig neuer Lösungstypen. Beispielsweise werden für eine Kette gekoppelter, anharmonischer Oszillatoren für kleine Auslenkungen normale Schwingungsmoden erhalten. Neue Lösungstypen (Solitonen) treten bei großen Auslenkungen (Überschlag der Pendelkette) auf; sie werden durch

eine spezielle topologische Struktur beschrieben.

Besonders anschaulich ist die Herausbildung von (zeitlichen und räumlichen) Strukturen. So zeigt die Belousov–Zhabotinsky–Reaktion, eine Redox–Reaktion, einen periodischen Farbwechsel und eine räumliche Strukturierung mit Führungszentren und Spiralwellen. Spezielle Lichtquellen (Laser) emittieren, wenn die Anregungsleistung einen Schwellwert übersteigt, anstelle einer inkohärenten Strahlung kohärentes Licht. Räumliche Strukturen unterschiedlicher Symmetrie können entstehen, wenn eine Flüssigkeitsschicht von unten genügend stark erhitzt wird (Benard–Zellen). Bei strömenden Flüssigkeiten kann der Übergang von der laminaren Bewegung zur turbulenten Strömung beobachtet werden, wenn bestimmte Grenzwerte überschritten werden. Strukturbildung läßt sich bei Reaktions–Diffusions–Systemen in der Chemie sowie in biologischen Systemen beobachten, auch in der Medizin (als Beispiel sei der Herzrhythmus genannt) werden selbsterregte, nichtlineare Stoffwechselsysteme untersucht. Sie werden durch einfache nichtlineare, gekoppelte Differentialgleichungen modelliert, die auch zur Beschreibung der Selbstorganisation in verschiedenen anderen Bereichen der Natur eingesetzt werden können.

Kleine Änderungen der Anfangslagen in einem System aus vielen Teilchen führen zu Änderungen der Bahnkurven bei der Bewegung dieser Teilchen. Bleiben die Bahnkurven in der Nähe der ursprünglichen, ist das System dynamisch stabil. Entfernen sie sich in einem gewissen Gebiet exponentiell, ist es dynamisch instabil und besitzt einen chaotischen Attraktor. Das unterschiedliche Verhalten der Bahnkurven kann anhand von Poincaré–Abbildungen (Durchstoßpunkte der Trajektorie durch eine spezielle Ebene) dargestellt werden. In Abhängigkeit von Parametern kann zwischen einem periodischen, regulären und einem irregulären, chaotischen Verhalten unterschieden werden.

Bereits für einfache Systeme dreier gekoppelter nichtlinearer Differentialgleichungen (Lorenz–Modell, Rössler–System u.a.) läßt sich der Übergang von einer regulären, periodischen Lösung zu einem irregulären, chaotischem Verhalten bei Änderung vorgegebener Parameter studieren (Feigenbaum–Szenario). Für einfache Systeme harter Scheiben (zweidimensionales Sinai–Billard) konnte streng bewiesen werden, dass chaotische Bewegungsformen vorliegen. Die Nichtvorhersagbarkeit einer Trajektorie über einen großen Zeitabschnitt ist eine Folge des deterministischen Chaos. Die entsprechenden Modelle wurden ursprünglich eingeführt, um das Verhalten der Atmosphäre zu beschreiben. Somit ist auch die Wetterentwicklung – damit auch die Wettervorhersage – ein typisches Beispiel für chaotisches Verhalten. Unter bestimm-

ten Bedingungen der Instabilität kann bereits eine kleine Störung im Lokalen eine große Auswirkung im Globalen nach sich ziehen. Es ist die berühmte Bewegung eines Schmetterlings in Südamerika, das Schlagen seiner Flügel, dass Auswirkungen auf die Wetterentwicklung in Nordeuropa hat.

Im Gegensatz zu klassischen Systemen läßt sich für Quantensysteme die chaotische Bewegung nur schwer definieren. Gegenwärtige Untersuchungen stellen das Quantenchaos in Beziehung zur Verteilung der Energieniveaus eines Quantensystems.

Ein besonders interessantes Gebiet gegenwärtiger Forschung sind die mesoskopischen Systeme und Cluster. Die Untersuchungen von kleinen Systemen, bestehend aus wenigen Teilchen, zeigen den Übergang von einem komplexen, gebundenen Zustand zu einem makroskopischen kondensierten System mit kollektiven Bewegungsmoden. Hierbei kann es sich bei den gebildeten Aggregaten um Fullerene (Kohlenstoff-Cluster mit bemerkenswerten Eigenschaften), Molekülcluster, metallische Cluster, aber auch um Atomkerne handeln. Das Anregungsspektrum solcher komplexen Systeme kann chaotisches Verhalten zeigen. Insbesondere die Dämpfung von solchen Anregungen zeigt überraschende Effekte. Als Beispiel sei auf die Verteilung der Energie auf verschiedene Freiheitsgrade in komplexen Systemen verwiesen. So ist die Frage von Energietransfer und Energiekonzentration (Aktivierungsenergie) für die Wirkung biologischer Enzyme oder der Photosynthese von entscheidender Bedeutung.

Ein weiteres interessantes Problem ist das Wachstum von Clustern im Nichtgleichgewicht, einschließlich der Herausbildung von fraktalen Strukturen. Auch die Entwicklung sozialer Erscheinungen (Meinungsbildung, Stadtentwicklung, Migration) kann als Clusterbildungs- und Wachstumsprozeß interpretiert werden. Das Verhalten solcher komplexer Systeme, die in Wechselwirkung mit der Umgebung stehen, läßt sich durch einen stochastischen Prozeß simulieren. Fluktuationen und Dissipation werden durch einen Zufallsprozeß, einen Rauschterm, erfaßt. Hochangeregte Atome in der Paul-Falle, die elektrische Leitfähigkeit in mesoskopischen Systemen und weitere Fragen sind interessante Forschungsobjekte zum Studium chaotischen Verhaltens in Quantensystemen. Die Dynamik komplexer Systeme ist insbesondere dann von großem theoretischen und experimentellen Interesse, wenn sich starke Korrelationen zwischen den Teilchen herausbilden. Eigenschaften solcher Systeme stehen im Mittelpunkt theoretischer Grundlagenforschung sowohl der subatomaren Physik, als auch der Plasmaphysik und Festkörperphysik. Zu den zahlreichen, zur Zeit noch ungeklärten Fragen auf diesem Gebiet stark korrelierter

Systeme gehören u. a. die Hochtemperatursupraleitung und die Lokalisation.

Ein weiteres Beispiel für nichtlineare komplexe Systeme sind die neuronalen Netzwerke. Dieses Forschungsgebiet führt Erkenntnisse der Physik, der Informatik, der Mathematik bis hin zur neuronalen Medizin zusammen. Es ist zu erkennen, dass es für die Computerentwicklung, die Kommunikationstechnik und Informationsverarbeitung, aber auch für die Biologie und Medizin von großer Bedeutung ist.

3 Klassifikation dynamischer Systeme

Entwicklungsprozesse, bei denen der gesamte Ablauf in Vergangenheit und Zukunft eindeutig durch den Zustand zum gegenwärtigen Zeitpunkt bestimmt ist, scheinen einfach und keinerlei Besonderheiten in sich zu bergen. Diese Aussagen, seit Newton und Leibniz in Form der klassischen Mechanik vollendet, wurden Anfang dieses Jahrhunderts durch Poincaré revidiert. Er nahm vorweg, was heute, bei der massenhaften Verbreitung von Computern, bis ins Bewußtsein nicht nur von Spezialisten, sondern auch einer breiten Öffentlichkeit dringt: die Resultate der *Theorie nichtlinearer dynamischer Systeme*. Beim Studium nichtlinearer Vorgänge treten das Vorhersehbare und das Unvorhersehbare als Einheit hervor, bekannt sind diese Erscheinungen unter dem Begriff „Deterministisches Chaos“.

Einige Meilensteine auf dem Weg dorthin seien an dieser Stelle nochmals genannt:

1. Eduard Lorenz zeigt, dass sein einfaches Modell aus drei gekoppelten nichtlinearen Differentialgleichungen zu irregulären Trajektorien fähig ist (Lorenz, 1963).
2. Das berühmte Henon–Heiles–Modell entwickelt sich zu einem viel diskutierten Beispiel für numerische und theoretische Studien dynamischer Systeme (Henon, Heiles, 1964).
3. Neben den klassischen Attraktoren (Fixpunkte, Grenzyklen, . . .) wird die Existenz von seltsamen Attraktoren (strange attractor) nachgewiesen (Ruelle, Takens, 1971).
4. Nichtlineare dynamische Systeme mit vielen Variablen werden zur Modellierung in der Ökologie, Soziologie, den Wirtschaftswissenschaften

und weiteren Gebieten eingesetzt, beispielsweise sei die Dynamik von Populationen angeführt (May, 1976).

5. Periodenverdopplungen und Bifurkationen werden in diskreten dynamischen Systemen untersucht. Die logistische Abbildung liefert das berühmte Feigenbaum-Diagramm (Feigenbaum, 1978); im Jahre 1980 folgt Benoit Mandelbrot mit den „Apfelmännchen“ und zeigt dessen fraktale Strukturen auf (Mandelbrot, 1982).

Systeme von Differentialgleichungen 1. Ordnung spielen eine fundamentale Rolle bei der Beschreibung von dynamischen Prozessen. Die mathematische Theorie zur Behandlung von gewöhnlichen Differentialgleichungssystemen ist seit dem vorigen Jahrhundert gut ausgearbeitet; ihre Eckpfeiler sind die Existenz- und Eindeutigkeitsätze. Sie sichern, dass die Lösung eines Differentialgleichungssystems existiert und eindeutig bestimmt ist, falls die Werte der unabhängigen Variablen zu einem beliebig vorgegebenen Zeitpunkt bekannt sind. Neben der mathematischen Literatur zur Theorie dynamischer Systeme sind besonders für den Physiker die von Vladimir Arnold zu diesem Thema verfaßten Monographien und Lehrbücher, beispielsweise die deutsche Übersetzung (Arnold, 1979), hervorzuheben.

Die unerwartet stürmische Entwicklung zur klassischen Dynamik relativ einfacher Systeme mit wenigen Freiheitsgraden ist in einer kaum überschaubaren großen Anzahl von Artikeln in Fachzeitschriften und Monographien dargestellt. Einen guten Überblick und Einstieg in die Theorie konservativer und dissipativer nichtlinearer dynamischer Systeme geben u. a. (Anishchenko, 1987; Arnold, 1980; Ebeling, Feistel, 1982; Ebeling, Engel, Feistel, 1990; Guckenheimer, Holmes, 1983; Jetschke, 1989; Kunik, Steeb, 1986; Lichtenberg, Lieberman, 1983; Schuster, 1984; Steeb, 1994). Zur Theorie der schwingungsfähigen Systeme verweisen wir zusätzlich auf den „aktuellen Klassiker“ (Andronov, Witt, Chaikin, 1965, 1969). Neue Lehrbücher zur theoretischen Mechanik, die das dynamische System in den Mittelpunkt stellen und darauf aufbauend nicht nur die wenigen integrablen Beispiele untersuchen, fehlen in der Regel noch. Eine bemerkenswerte Ausnahme ist das Lehrbuch von Scheck (1988) mit dem Untertitel „Von der Newtonschen Mechanik zum deterministischen Chaos“ einschließlich der Aufgaben und Lösungen (Scheck, Schöpf, 1989).

Im folgenden wollen wir kurz den Begriff des dynamischen Systems einführen und eine Klassifikation dynamischer Systeme nach unterschiedlichen Kriterien vorstellen. Anschließend werden allgemeine Resultate zur Evolution in

Hamiltonschen Systemen zusammengefaßt.

Ein (physikalisches) System sei durch einen Satz von unabhängigen Variablen x_i ($i = 1, 2, \dots, n$) bestimmt. Diese Größen x_i spannen einen Zustandsraum X auf. Der Zustand des Systems ist zu jedem Zeitpunkt t durch die Angabe der Werte der Variablen $x_i(t)$ eindeutig bestimmt

$$x(t) = (x_1(t), x_2(t), \dots, x_n(t)) \quad \text{Zustandsvektor} \quad (1)$$

und repräsentiert einen Punkt im Zustandsraum.

Die Bewegung des Zustandes wird mittels einer Evolutionsgleichung festgelegt, insbesondere gilt für ein dynamisches System, dass das Bewegungsgesetz durch einen Satz von gewöhnlichen Differentialgleichungen 1. Ordnung definiert ist.

Sei $x(t)$ ein n -dimensionaler Zustandsvektor, so ist ein dynamisches System gegeben durch Bewegungsgleichungen vom Typ gewöhnlicher Differentialgleichungen 1. Ordnung der Art

$$\frac{d}{dt}x(t) = v [x(t)] \quad \text{Bewegungsgleichungen} . \quad (2)$$

Das dynamische System ist somit eine Abbildung vom Zustand $x_0 \equiv x(t_0)$ zum Zeitpunkt t_0 (Anfangswert) in den Zustand $x(t)$ zum Zeitpunkt t , d.h. eine Abbildung $x(t) = T^t x_0$. Die Bewegung im Zustandsraum heißt Bahnkurve, Orbit oder Trajektorie und ist durch die rechten Seiten der Bewegungsgleichungen, d. h. durch den Geschwindigkeitsvektor $v(x)$, eindeutig bestimmt. Die Lösung des dynamischen Systems bestimmen heißt also, die Menge aller Trajektorien

$$x(t) = F(t; t_0, x_0) \quad \text{Trajektorie} \quad (3)$$

für alle möglichen Anfangszustände x_0 zu jedem Zeitpunkt t zu kennen. Dabei interessiert es nicht so sehr, eine spezielle Trajektorie (gehörig zum Anfangswert x_0) zu kennen, sondern das qualitative und möglichst auch das quantitative Verhalten aller Trajektorien, d.h. den Fluss im Zustandsraum vollständig zu analysieren. Die Topologie der Zustandsraums studieren heißt also, auf die folgenden Fragen einzugehen:

- Existieren ausgezeichnete Punkte (singuläre Zustände, Fixpunkte) im Zustandsraum?
- Wie verhält sich der Fluss in der Nähe dieser Punkte?

- Ist der Fluss kontrahierend bzw. expandierend oder nicht?

Die Klassifikation dynamischer Systeme kann nach verschiedenen Kriterien erfolgen. Wir schlagen nun die folgende Variante vor, wobei die fett markierten Eigenschaften in den nachfolgenden Kapiteln im Mittelpunkt stehen werden.

a) **Lineare / nichtlineare** dynamische Systeme

Ist die Geschwindigkeit $v(x)$ eine lineare Funktion in x , d.h.

$$\dot{x} = Ax \quad ; \quad x(t = t_0) = x_0 , \quad (4)$$

so ist die allgemeine Lösung bekannt und lautet

$$x(t) = x_0 \exp(At) . \quad (5)$$

Es gilt das Superpositionsprinzip. Zu beachten ist aber, dass schon die einfachsten realen Systeme (man denke beispielsweise an das mathematische Pendel) nichtlinear sind.

b) **Endlich- / unendlich-dimensionale** dynamische Systeme

Ist der Zustandsraum endlich-dimensional ($n < \infty$), so sind die Dynamiken mit $n = 1$ und $n = 2$ bekannt und im Prinzip stets analytisch lösbar, interessant wird es für die Situationen mit $n \geq 3$.

Falls die Zahl der unabhängigen Variablen sehr groß ($n \rightarrow \infty$) wird, so verliert das dynamische System in der Definition (1, 2) seinen Sinn und es sind dann andere Evolutionsgleichungen (partielle Differentialgleichungen) zu verwenden. Für Reaktions-Diffusions-Systeme ist die dynamische Bewegungsgleichung für die orts- und zeitabhängige Konzentration $c(r, t)$ vom Typ

$$\frac{\partial c}{\partial t} = f [c(r, t)] + \frac{\partial^2 c}{\partial^2 r} . \quad (6)$$

c) **Deterministische / stochastische** dynamische Systeme

Wirken auf das System keine äußeren Einflüsse, die ein Schwanken der Kontrollparameter veranlassen könnten, und ist auch keine innere Rauschquelle im System vorhanden, so existiert bei dieser deterministischen Beschreibung eine eindeutige reguläre oder chaotische Bahn

Abb. 1: Eindeutige Bahnkurven einer deterministischen Beschreibung bei starker Kausalität (links) und schwacher Kausalität (rechts).

Abb. 2: Mehrdeutige Bahnkurven einer stochastischen Beschreibung mit der zeitlichen Entwicklung einer Wahrscheinlichkeitsverteilung $p(x, t)$.

(siehe Abb. 1).

Ist andernfalls Rauschen von Bedeutung, so führt dies zu einer stochastischen Beschreibung von dynamischen Systemen (Röpke, 1987; Malchow, Schimansky-Geier, 1985). Die Abbildung 2 zeigt als Skizze mehrere Realisierungen desselben dynamischen Prozesses mit einer sich herausbildenden Verteilung $p(x, t)$.

Stochastische dynamische Systeme werden entweder durch Evolutionsgleichungen vom Langevin-Typ mit einer stochastischen Kraft oder Rauschquelle $\Gamma(t)$

$$\frac{d}{dt}x(t) = v [x(t)] + \Gamma(t) \quad (7)$$

oder durch eine Bilanzgleichung im Wahrscheinlichkeitsraum, die Mastergleichung

$$\frac{\partial p(x, t)}{\partial t} = \sum_{x'} [w(x, x')p(x', t) - w(x', x)p(x, t)] \quad (8)$$

beschrieben. $w(x', x)$ heißt Übergangswahrscheinlichkeit vom Zustand x nach x' .

d) **Autonome** / nichtautonome dynamische Systeme

Liegt noch zusätzlich eine explizite Zeitabhängigkeit (neben der üblichen impliziten) vor, so handelt es sich um ein nichtautonomes dynamisches System

$$\frac{d}{dt}x(t) = v [x(t) , t] . \quad (9)$$

Die Autonomie läßt sich aber wieder herstellen, in dem der Zustandsraum um eine Dimension ($x_{n+1} = t$) erweitert und eine neue Zeit u eingeführt wird

$$\frac{dx_i}{du} = v_i (x_1, x_2, \dots, x_{n+1}) \quad \text{für } i = 1, 2, \dots, n + 1 . \quad (10)$$

Damit ist die Rückführung auf ein autonomes dynamisches System gegeben. In kompakter Schreibweise entspricht (10) den Bewegungsgleichungen (2).

e) **Kontinuierliche** / **diskrete** dynamische Systeme

Aus den gewöhnlichen Differentialgleichungen 1. Ordnung werden Differenzgleichungen, wenn die Zeit diskretisiert wird, u. z.

$$t \rightarrow t_0, t_1, \dots, t_i, \dots \quad ; \quad t_i = t_0 + i\Delta t \quad (11)$$

$$\dot{x} = v(x) \rightarrow x(t + \Delta t) = x(t) + v(x(t))\Delta t + O(\Delta t^2) . \quad (12)$$

Fixieren wir den Zeitschritt zu eins ($\Delta t = 1$), so folgt aus (12) die Iterationsgleichung

$$x(t + 1) = x(t) + v(x(t)) \equiv \tilde{v}(x(t)) . \quad (13)$$

Wir erhalten somit als Evolutionsgleichung für das diskrete dynamische System eine Abbildung \tilde{v} der Art

$$x_{t+1} = f(x_t) . \quad (14)$$

Bekanntestes Beispiel ist die logistische Abbildung mit einer quadratischen Nichtlinearität

im Reellen:	$x_{i+1} = rx_i(1 - x_i)$	P. F. Verhulst (1845) Feigenbaum-Diagramm
im Komplexen:	$z_{i+1} = z_i^2 + c$	B. Mandelbrot (1980) Apfelmännchen-Bild

Zu diesen Abbildungen und weiteren nichtlinearen Modellen ein- und mehrdimensionaler diskreter dynamischer Systeme existiert umfangreiche Literatur (Schuster, 1984). Diese Iterationen dienen häufig als Prototypen für das Studium des deterministischen Chaos und der Selbstähnlichkeit.

f) **Konservative / dissipative** dynamische Systeme

Diese Unterscheidung ist von großem inhaltlichen Interesse, da die unterschiedlichen (physikalischen) Systeme in zwei große Gruppen zerlegt werden können. Eine verbale Formulierung lautet wie folgt.

Gibt es im Zustandsraum einen kontrahierenden oder expandierenden Fluss, dann handelt es sich um ein dissipatives dynamisches System. In solchen Systemen existieren Attraktoren (anziehende singuläre Punkte, stabile Grenzzyklen, höherdimensionale anziehende Tori, seltsame Attraktoren) und Repeller (abstoßende singuläre Punkte, instabile Grenzzyklen, höherdimensionale instabile Mannigfaltigkeiten).

Herrscht dagegen im Zustandsraum eine konstante Zustandsraumdichte, dann handelt es sich um ein konservatives System. Damit ist aus Auftreten von Quellen (Repellern) und Senken (Attraktoren) unmöglich, es gibt höchstens elliptische und hyperbolische Fixpunkte (Wirbel, Sattel, siehe Abb. 3) und semistabile Grenzzyklen bzw. Tori.

Eine wichtige Klasse der konservativen dynamischen Systeme sind die Hamiltonschen Systeme. Der Zustandsraum heißt in diesem Fall Phasenraum $x = (q, p)$, gebildet aus den generalisierten Orten q und den Impulsen p . Er hat die Dimension $n = 2f$, wobei f die Zahl der Freiheitsgrade des Systems ist. Die Evolutionsgleichungen des dynamischen Systems (2) sind die Hamiltonschen Bewegungsgleichungen

$$\frac{dq}{dt} = \frac{\partial H}{\partial p} \tag{15}$$

$$\frac{dp}{dt} = -\frac{\partial H}{\partial q} \tag{16}$$

Abb. 3: Elliptischer (links) und hyperbolischer Fixpunkt (rechts) in konservativer Systemen.

mit der nichtlinearen Hamilton-Funktion

$$H = H(q, p) \equiv H(q_1, q_2, \dots, q_f, p_1, p_2, \dots, p_f) . \quad (17)$$

Die Gleichungen (15, 16) repräsentieren $2f$ gekoppelte nichtlineare Differentialgleichungen 1. Ordnung. Es gilt das Liouville-Theorem über den inkompressiblen Fluss im Phasenraum (Arnold, 1980; Landau, Lifschitz, 1981; Scheck, 1988)

$$\operatorname{div} v = \operatorname{div}(\dot{q}, \dot{p}) = \sum_i \left(\frac{\partial^2 H}{\partial q_i \partial p_i} - \frac{\partial^2 H}{\partial p_i \partial q_i} \right) = 0 . \quad (18)$$

Hiermit schließen wir unsere Klassifikation ab und stellen abschließend die Frage: Gibt es eine konstruktive Methode, so dass ein dynamisches System mit beliebigen Differentialgleichungen 1. Ordnung in Hamiltonscher Form geschrieben werden kann? Mit anderen Worten: Unter welchen Voraussetzungen lassen sich die allgemeinen Evolutionsgleichungen (2) in die kanonische Form (15, 16) überführen?

Unter Verwendung der Poisson-Klammern $\{\cdot, \cdot\}$ lautet die Fragestellung, unter welchen Bedingungen

$$\dot{x} = v(x) = \begin{pmatrix} \dot{q} \\ \dot{p} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \partial H / \partial p \\ \partial H / \partial q \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \{H, q\} \\ \{H, p\} \end{pmatrix} \stackrel{?}{=} \{H, x\} \quad (19)$$

bzw. in Komponentenschreibweise

$$\dot{x}_i = v_i(x_1, \dots, x_n) \stackrel{?}{=} \{H(x_1, \dots, x_n), x_i\} = \sum_j \{x_i, x_j\} \frac{\partial H}{\partial x_j} \quad (20)$$

möglich ist. Dabei wird die Poisson–Klammer wie üblich als ein linearer antisymmetrischer Operator mit der Eigenschaft der Jacobi–Identität (Lie–Gruppeneigenschaft) verstanden. Es gilt

$$\{A, B\} = \sum_i \sum_j \{x_i, x_j\} \frac{\partial A}{\partial x_j} \frac{\partial B}{\partial x_i} \quad (21)$$

mit $P_{ij}(x_1, \dots, x_n) = \{x_i, x_j\}$ als Poisson–Tensor.

Die Aufgabenstellung lautet somit, ob ein gegebenes Vektorfeld $v(x)$ als

$$v_i(x) = \sum_j P_{ij}(x) \frac{\partial H}{\partial x_j} \quad (22)$$

geschrieben werden kann. In (Abarbanel, Rouhi, 1987) wird eine konstruktive Methode beschrieben, die es gestattet, für lokale Bereiche des Zustandsraumes die Hamilton–Funktion $H(x)$ des Feldes $v(x)$ zu konstruieren, beispielsweise für den gedämpften harmonischen Oszillator.

4 Stabilitätsanalyse dynamischer Systeme

Zum besseren Verständnis der Methoden zur Behandlung nichtlinearer dynamischer Systeme wird zunächst die Untersuchung einfacher Modellsysteme empfohlen. Diese Modelle spielen bei der Diskussion zu Problemen der Strukturbildung eine große Rolle. Die gelernten Methoden lassen dann auch auf komplexe Systeme übertragen.

Die folgenden Aufgaben behandeln spezielle zwei– bzw. dreidimensionale kontinuierliche dynamische Systeme, deren Zustandsraumdynamik zu analysieren ist. Analytisch sind Fixpunkte und periodische Lösungen (z.B. Grenzzyklen) zu bestimmen. Anschließend ist die Stabilitätsanalyse durchzuführen, um die stabilen Lösungen zu erhalten. Kritische Werte der Kontrollparameter, bei denen sich das Stabilitätsverhalten stationärer Zustände ändert, sind anzugeben. Numerisch sind einzelne Trajektorien zu berechnen, um so einen Überblick über den Fluß im Zustandsraum zu erhalten.

Da im allgemeinen das dynamische System (siehe Kapitel 3, Gleichung 2)

$$\frac{d}{dt}x(t) = v(x(t)) \quad ; \quad x_0 = x(t_0) \quad (23)$$

zu kompliziert ist, um den Fluß (Menge aller Trajektorien, Gleichung 3) vollständig zu bestimmen, beschränkt man sich häufig auf die Ermittlung der stationären Zustände, auch Fixpunkte oder singuläre Punkte genannt. Die stationären Lösungen ($dx/dt \equiv \dot{x} = 0$) folgen aus einem System algebraischer Gleichungen

$$v(x) = 0 \implies x_{st} = (x^{(0)}, x^{(1)}, \dots) \quad \text{Fixpunkte} \quad (24)$$

und entsprechen physikalisch den Gleichgewichtszuständen. Es erhebt sich nun folgende wichtige Frage: Welche Zustände werden bevorzugt angelau-
fen, wenn das System bei festen Parametern mehrere Gleichgewichtslagen besitzt? Die Antwort gibt die Stabilitätsanalyse der Fixpunkte (Fixpunkt-
analyse).

Ein stationärer Zustand x_{st} heißt stabil (andernfalls instabil), wenn eine kleine Schwankung δx

$$x(t) = x_{st} + \delta x \quad (25)$$

im Laufe der Zeit abklingt

$$|\delta x| = |x(t) - x_{st}| \rightarrow 0 \quad \text{für} \quad t \rightarrow \infty, \quad (26)$$

(andernfalls sich aufschauelt und der stationäre Zustand dabei verlassen wird).

Eine Trajektorie, die nicht von einem singulären Punkt startet, kann einen stabilen Fixpunkt nur asymptotisch für $t \rightarrow \infty$ erreichen. Die Frage nach der Stabilität bzw. Instabilität stationärer Lösungen kann mit der Methode der kleinen Störungen entschieden werden. Dazu wird in der Umgebung von x_{st} eine Taylorentwicklung durchgeführt, u. z.

$$\delta x = x(t) - x_{st} \equiv y \quad (27)$$

$$\frac{dy}{dt} = v(x_{st}) + \left. \frac{dv}{dx} \right|_{x=x_{st}} y + \dots \quad (28)$$

$$= py \quad \text{mit} \quad p = v'(x_{st}) \quad (29)$$

mit der Lösung

$$y(t) = y(0) \exp(pt) . \quad (30)$$

Für eindimensionale dynamische Systeme, die sich auch stets als Gradientensysteme mit Hilfe einer Potentialfunktion $V(x)$ schreiben lassen

$$\dot{x} = v(x) = -\frac{dV(x)}{dx}, \quad (31)$$

ist die Stabilitätsanalyse elementar. Es gilt

1. $p < 0$ x_{st} ist stabil (exponentielles Abklingen der Störung)
2. $p > 0$ x_{st} ist instabil (exponentielles Anwachsen der Störung)
3. $p = 0$ x_{st} ist labil (instabil, eindimensionaler Sattel)
 Analyse unter Verwendung der Ableitung 2. Ordnung nötig

$$\dot{y} = \frac{1}{2}v''(x_{st})y^2 = p_2y^2 . \quad (32)$$

Die Fixpunktanalyse für zweidimensionale dynamische Systeme liefert in linearer Näherung

$$\frac{dy_i}{dt} = \sum_{k=1}^2 a_{ik}y_k \quad \text{mit} \quad a_{ik} = \left. \frac{\partial v_i(x_1, x_2)}{\partial x_k} \right|_{x_k=x_k^{st}} . \quad (33)$$

Die Lösung wird wiederum mit dem Exponentialansatz ermittelt, u. z.

$$y_k(t) = y_k(0) \exp(pt) \quad (34)$$

$$py_i = \sum_k a_{ik}y_k \quad (35)$$

$$0 = \sum_k (a_{ik} - p\delta_{ik}) y_k \quad (36)$$

$$0 = \begin{vmatrix} a_{11} - p & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} - p \end{vmatrix} . \quad (37)$$

Gesucht sind die Wurzeln p_1, p_2 der zuletzt genannten charakteristischen Gleichung

$$p^2 + A_1p + A_0 = 0 \quad (38)$$

mit

$$A_1 = -(a_{11} + a_{22}) = -\text{Spur } a_{ik} \quad (39)$$

$$A_0 = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21} = \text{Det } a_{ik} . \quad (40)$$

Asymptotische Stabilität (negative Realteile der Wurzeln p_1 und p_2) liegt nach dem Hurwitz – Kriterium vor, wenn

$$A_1 > 0 \quad \text{und} \quad A_0 > 0 \quad (41)$$

gilt.

Insgesamt existieren sechs Möglichkeiten, die in der Abbildung 4 zusammengefaßt sind.

Abb. 4: Skizze zur Klassifikation der verschiedenen Fixpunkte in der Parameterebene.

1. p_1, p_2 reell, negativ \implies stabiler Knoten
2. p_1, p_2 reell, positiv \implies instabiler Knoten
3. p_1, p_2 komplex, negativer Realteil \implies stabiler Strudel
4. p_1, p_2 komplex, positiver Realteil \implies instabiler Strudel
5. p_1, p_2 reell, unterschiedlicher Vorzeichen \implies Sattel
6. p_1, p_2 rein imaginär \implies Wirbel

Die Fallunterscheidungen lassen sich an Hand eines einfachen zweidimensionalen dynamischen Systems studieren. Bezeichnen wir die beiden Variablen mit r (Abstand zum Koordinatenursprung, Radius) und α (Winkel zur positiven x -Achse), die zwei Kontrollparameter mit a_1 und a_2 . Die Bewegungsgleichungen seien

$$\dot{r} = a_1 r \tag{42}$$

$$\dot{\alpha} = a_2 \tag{43}$$

Da diese beiden Gleichungen entkoppelt sind, kann nach Integration unter Berücksichtigung der Anfangsbedingungen $r(0) = r_0$, $\alpha(0) = \alpha_0$

$$r(t) = r_0 e^{a_1 t} \tag{44}$$

$$\alpha(t) = a_2 t + \alpha_0 \tag{45}$$

Abb. 5: Schematische Darstellung der Fixpunkte eines zweidimensionalen dynamischen Systems.

die Trajektorie unmittelbar berechnet werden. Wir erhalten als Lösung

$$r(\alpha) = r_0 e^{\frac{a_1}{a_2}(\alpha - \alpha_0)} . \quad (46)$$

In Abhängigkeit vom Vorzeichen (+, ±0, −) der Parameter a_1, a_2 sind verschiedene Situationen zu unterscheiden.

1. Fall: $a_1 > 0, a_2 \neq 0 \implies$ instabiler Strudel
2. Fall: $a_1 < 0, a_2 \neq 0 \implies$ stabiler Strudel
3. Fall: $a_1 = 0, a_2 \neq 0 \implies$ Wirbel
4. Fall: $a_1 > 0, a_2 = 0 \implies$ instabiler Knoten
5. Fall: $a_1 < 0, a_2 = 0 \implies$ stabiler Knoten.

Zusammen mit dem Sattelpunkt sind diese Fixpunkte in der Abbildung 5 dargestellt.

5 Zwei oszillatorische dynamische Systeme

Untersuchen wir zuerst das elementare zweidimensionale dynamische System

$$\begin{aligned}\dot{x} &= -x + y \\ \dot{y} &= -x - y.\end{aligned}$$

Anschließend ist der Fluß im Zustandsraum für ein erweitertes Modellsystem

$$\begin{aligned}\dot{x} &= x - y - x(x^2 + y^2) \\ \dot{y} &= x + y - y(x^2 + y^2)\end{aligned}$$

zu analysieren, das in Beziehung zum van der Pol-Oszillator steht.

Das folgende in einem zweidimensionalen x - y -Zustandsraum „lebende“ lineare dynamische System

$$\dot{x} = -x + y \quad (47)$$

$$\dot{y} = -x - y. \quad (48)$$

ist auf Grund der Kopplung der beiden Gleichungen in kartesischen Koordinaten recht schwierig zu lösen. Deshalb führen wir eine Transformation auf Polarkoordinaten durch. Das Ziel besteht in der Entkopplung der beiden Gleichungen.

Unter Verwendung der Transformationsbeziehungen

$$x = r \cos \alpha \quad ; \quad r = \sqrt{x^2 + y^2} \quad (49)$$

$$y = r \sin \alpha \quad ; \quad \alpha = \arctan(y/x) \quad (50)$$

erhalten wir aus (47, 48) mittels

$$\dot{r} = \frac{\dot{x}x + \dot{y}y}{\sqrt{x^2 + y^2}} \quad (51)$$

$$= \frac{-x^2 + xy - xy - y^2}{\sqrt{x^2 + y^2}} \quad (52)$$

$$= -\sqrt{x^2 + y^2} = -r \quad (53)$$

$$\dot{\alpha} = \frac{\dot{y}x^{-1} - \dot{x}yx^{-2}}{1 + y^2x^{-2}} \quad (54)$$

$$= \frac{\dot{y}x - \dot{x}y}{x^2 + y^2} \quad (55)$$

$$= \frac{-x^2 - xy + xy - y^2}{x^2 + y^2} = -1 \quad (56)$$

das entkoppelte Gleichungssystem

$$\dot{r} = -r \quad (57)$$

$$\dot{\alpha} = -1 . \quad (58)$$

Eine vollständige Lösung mittels elementarer Integration ist möglich. Die zum Anfangszustand $(r_0 = r(t_0); \alpha_0 = \alpha(t_0))$ gehörende Trajektorie lautet

$$r(t) = r_0 \exp(-t) \quad (59)$$

$$\alpha(t) = -t + \alpha_0 \quad (60)$$

bzw.

$$r(\alpha) = r_0 \exp(\alpha - \alpha_0) . \quad (61)$$

Der Fluß im Zustandsraum (Abb. 6) zeigt das Einstrudeln aller Trajektorien zum Koordinatenursprung $(0,0)$. Die Gleichung (61) beschreibt logarithmische Spiralen in Richtung auf den Ursprung. Das dynamische System (47, 48) entspricht physikalisch einem Pendel mit schwacher Reibung, wobei die Gleichgewichtslage $(x_{st} = 0, y_{st} = 0)$ ein stabiler Strudelpunkt ist.

Das erweiterte Modellsystem

$$\dot{x} = x - y - x(x^2 + y^2) \quad (62)$$

$$\dot{y} = x + y - y(x^2 + y^2) \quad (63)$$

entkoppeln wir wiederum, indem wir die Transformation auf Polarkoordinaten durchführen. Wir erhalten nach analoger Rechnung

$$\dot{r} = r(1 - r^2) \quad (64)$$

$$\dot{\alpha} = 1 . \quad (65)$$

Aus der Gleichung (64) folgen zwei Fixpunkte, u.z.

$$r_{st}^{(0)} = 0 \quad (66)$$

$$r_{st}^{(1)} = 1 . \quad (67)$$

Die Integration der einfachen Bewegungsgleichungen (64, 65) ist elementar möglich. Nach Trennung der Variablen, Benutzung des Integrals

$$\int \frac{dx}{x(ax^2 + bx + c)} = \frac{1}{2c} \ln \frac{x^2}{ax^2 + bx + c} - \frac{b}{2c} \int \frac{dx}{ax^2 + bx + c} \quad (68)$$

mit $a = -1, b = 0, c = 0$, somit

$$\int \frac{dr}{r(1 - r^2)} = \frac{1}{2} \ln \frac{r^2}{1 - r^2} , \quad (69)$$

Abb. 6: Fluss im Zustandsraum für das einfache System (links) und das erweiterte System (rechts) (Nobach, Mahnke, 1994).

folgt nach Inversion die allgemeine Lösung (globaler Fluss)

$$r(t) = \left[1 + \left(\frac{1}{r_0^2} - 1 \right) e^{-2t} \right]^{-1/2} \quad (70)$$

$$\alpha(t) = \alpha_0 + t \quad (71)$$

bzw. als Trajektorie (Abb. 6)

$$r(\alpha) = \left[1 + \left(\frac{1}{r_0^2} - 1 \right) e^{-2(\alpha - \alpha_0)} \right]^{-1/2} . \quad (72)$$

Die Analyse zeigt, dass jede Trajektorie ($r_0 \neq 1$) für $t \rightarrow \infty$ dem Zustand $r_{st}^{(1)} = 1$ (67) zustrebt. Da der Winkel linear mit der Zeit anwächst (71), rotiert das System für lange Zeiten auf einem Kreis mit dem Radius $r = 1$. Somit ist der Koordinatenursprung als Fixpunkt (66) ein instabiler Strudel, während die stabile Lösung (67) einen Grenzyklus mit konstantem Radius (periodische Lösung) darstellt. Diese Situation beschreibt das Modell eines selbsterregten Schwingkreises, wie ihn der van der Pol-Oszillator darstellt.

6 Das mathematische Pendel

Die Theorie nichtlinearer dynamischer Systeme (siehe Kapitel 3) umfaßt unter anderem die klassische theoretische Mechanik. Moderne Lehrbücher der Mechanik stellen die kompakte Formulierung des Fachgebietes durch den Lagrange- und den Hamilton-Formalismus (kanonische Mechanik) in den Mittelpunkt (Scheck, 1988; Honerkamp, Römer, 1986; Stauffer, Stanley, 1990). Diese Formalismen sind auf Systeme mit beliebiger Teilchenzahl bzw. beliebiger Zahl von Freiheitsgraden f anwendbar, jedoch ist in der Regel nur der Spezialfall linearer Systeme analytisch auswertbar. Für nichtlineare Systeme lassen sich die Bewegungsgleichungen im allgemeinen nicht geschlossen lösen.

Bezeichnen wir mit $\underline{q} = (q_1, q_2, \dots, q_f)$ die generalisierten Orte und mit $\underline{p} = (p_1, p_2, \dots, p_f)$ die generalisierten Impulse, so spannen diese Variablen den $2f$ -dimensionalen Phasenraum (Zustandsraum) auf, in dem das dynamische System lebt. Ausgehend von einem wohl definierten Anfangszustand $\underline{q}(t=0) = \underline{q}_0$, $\underline{p}(t=0) = \underline{p}_0$ kann die Evolution des mechanischen Systems anhand der Trajektorie (Bahnkurve) verfolgt werden, die sich als Lösung der kanonischen Bewegungsgleichungen

$$\dot{q}_i \equiv \frac{dq_i}{dt} = \frac{\partial H}{\partial p_i} \quad ; \quad \dot{p}_i \equiv \frac{dp_i}{dt} = -\frac{\partial H}{\partial q_i} \quad \text{für } i = 1, \dots, f \quad (73)$$

ergibt. Dabei ist

$$H(\underline{q}, \underline{p}) = \sum_{i=1}^f \dot{q}_i p_i - L(\underline{q}, \dot{\underline{q}}) \quad (74)$$

die Hamilton-Funktion des Systems, wobei $L = T - V$ die Lagrange-Funktion und $p_i = \partial L / \partial \dot{q}_i$ die Impulse sind. Das Schema zur Lösung von Aufgaben der klassischen Mechanik umfaßt folgende Schritte:

1. Konstruktion der Hamilton-Funktion $H = H(\underline{q}, \underline{p})$
2. Einsetzen in die Bewegungsgleichungen (73) und
3. Lösung des (im allgemeinen nichtlinearen gekoppelten) Differentialgleichungssystems unter Berücksichtigung der Anfangsbedingungen.

Das Spektrum von Resultaten reicht von den bekannten elementaren Bewegungen (freies Teilchen, harmonischer Oszillator) über „im Prinzip“ integrable Bewegungen mit einem Freiheitsgrad $f = 1$ (mathematisches Pendel,

Kettenkarussell), mehrdimensionale gekoppelte Feder–Pendel–Systeme (gekreuzte Federn, Pedelkette und vieles andere) bis hin zum deterministischen Chaos in konservativen und dissipativen Systemen.

Betrachten wir einleitend das eindimensionale lineare Problem. Die Bewegungsgleichungen für konservative mechanische Systeme mit einem Freiheitsgrad lassen sich bekannterweise aus der Lagrange–Funktion

$$L(q, \dot{q}) = T - V \quad (75)$$

oder aus der Hamilton–Funktion

$$H(q, p) = T + V \quad (76)$$

gewinnen. Hierbei seien T die kinetische Energie und $V(q)$ die potentielle Energie des Systems. Für nichtlineare Systeme ist das Potential V eine beliebige Funktion von q und kann im allgemeinen mehrere Minima haben, die stationären Zuständen entsprechen (Abb. 7). Das Potential $V(q)$ läßt sich an dem relativen Minimum q_0 entwickeln und für kleine Auslenkungen durch einen quadratischen Ausdruck

$$V(q) = a + b(q - q_0)^2 \quad (77)$$

mit

$$a = V(q_0) \quad ; \quad b = V''(q_0)/2 \quad (78)$$

approximieren (harmonische Näherung). Als Beispiel sei der eindimensionale harmonische Oszillator genannt. Für große Auslenkungen werden Abweichungen vom linearen Verhalten spürbar (Anharmonizität). Die Lösungen für das mehrdimensionale lineare Oszillatorproblem sind gut bekannt und können in geschlossener Form angegeben werden. Viele Probleme lassen sich in harmonischer Näherung behandeln, wobei in der Regel mehrere Freiheitsgrade auftreten. Dann werden die Bewegungsgleichungen durch die Einführung von Normalmoden entkoppelt, wie das z.B. bei der Behandlung von Kristallgitterschwingungen in der elastischen linearen Näherung geschieht.

In diesem Abschnitt soll das Standardbeispiel für nichtlineare Systeme, das mathematische Pendel bei beliebigen Auslenkungen (Abb. 8), untersucht werden. Dieses mechanische System ist durch einen Freiheitsgrad (Winkel α) charakterisiert und wird wie folgt im Lagrange–Formalismus (Lagrange–Funktion, Bewegungsgleichung)

$$L(\alpha, \dot{\alpha}) = \frac{m}{2} l^2 \dot{\alpha}^2 - mgl(1 - \cos \alpha) \quad (79)$$

$$\ddot{\alpha} = -\omega^2 \sin \alpha \quad (80)$$

Abb. 7: Potential $V(q)$ eines nichtlinearen Systems und harmonische Näherung (punktierte Kurve).

Abb. 8: Skizze eines mathematische Pendels.

oder im Hamilton-Formalismus (Hamilton-Funktion, Bewegungsgleichungen)

$$H(\alpha, p_\alpha) = \frac{p_\alpha^2}{2ml^2} + mgl(1 - \cos \alpha) = E \quad (81)$$

$$\dot{\alpha} = \frac{p_\alpha}{ml^2} \quad (82)$$

$$\dot{p}_\alpha = -mgl \sin \alpha \quad (83)$$

beschrieben, wobei $\omega^2 = g/l$ die Kopplungsstärke an das Gravitationsfeld ausdrückt und für kleine Auslenkungen des Pendels die Bedeutung der Kreisfrequenz der Pendelschwingung hat. Das erste Integral der Bewegung (Erhaltungsgröße) ist die Gesamtenergie E . Es gilt (vergleiche 79)

$$E = \frac{m}{2} l^2 \dot{\alpha}^2 + mgl(1 - \cos \alpha) \quad (84)$$

bzw. der Ausdruck (81). Aus dem Energieerhaltungssatz folgt für die Trajektorie

$$E = ml^2 \left(\frac{\dot{\alpha}^2}{2} + \omega^2(1 - \cos \alpha) \right), \quad (85)$$

bei Benutzung von $\sin^2 x = \frac{1}{2}(1 - \cos 2x)$; $2x = \alpha$

$$E = ml^2 \left(\frac{\dot{\alpha}^2}{2} + 2\omega^2 \sin^2 \frac{\alpha}{2} \right). \quad (86)$$

Nach Einführung einer neuen Energieskala

$$\varepsilon^2 = \frac{E}{2ml^2} \quad (87)$$

erhalten wir aus (86) mittels

$$\varepsilon^2 = \frac{\dot{\alpha}^2}{4} + \omega^2 \sin^2 \frac{\alpha}{2} \quad (88)$$

die Trajektorie

$$\dot{\alpha}(\alpha; \varepsilon) = \pm 2\varepsilon \sqrt{1 - \frac{\omega^2}{\varepsilon^2} \sin^2 \frac{\alpha}{2}}. \quad (89)$$

Offensichtlich existiert ein dimensionsloser Kontrollparameter (dimensionslose Energie)

$$a^2 \equiv \frac{\varepsilon^2}{\omega^2} = \frac{E}{2mgl} \geq 0. \quad (90)$$

Damit lautet die Trajektoriengleichung (89) für die Winkelgeschwindigkeit

$$\dot{\alpha}(\alpha; a) = \pm 2\omega a \sqrt{1 - \frac{1}{a^2} \sin^2 \frac{\alpha}{2}}, \quad (91)$$

bzw. in der Impulsschreibweise $p_\alpha = ml^2 \dot{\alpha}$

$$p_\alpha(\alpha; a) = \pm 2ml^2 \omega a \sqrt{1 - \frac{1}{a^2} \sin^2 \frac{\alpha}{2}}. \quad (92)$$

Die Abbildung 9 zeigt das Trajektorienbild für das mathematische Pendel als numerische Lösung der kanonischen Bewegungsgleichungen (82 und 83) für verschiedene skalierte Energiewerte. Die Separatrix hat den Energiewert $E = 2mgl$ bzw. mit (90) den Wert $a = 1$. Fassen wir die Resultate aus der Analyse des Phasenraumporträts für das mathematische Pendel zusammen:

Abb. 9: Phasenraumporträt des mathematischen Pendels. In Abhängigkeit der dimensionslosen Energie sind die Ruhelage ($\varepsilon^2 = 0$; $(0,0)$ elliptischer Fixpunkt), die Libration ($0 < \varepsilon^2 < \omega^2$), die Bewegung entlang der Separatrix ($\varepsilon^2 = \omega^2$, $(\pm\pi, 0)$ hyperbolische Fixpunkte) und die Rotation ($\varepsilon^2 > \omega^2$) dargestellt (Nobach, Mahnke, 1994).

1. $E_{min} = 0$ bzw. $a = 0$

Pendel in der Gleichgewichtslage

$$\{\alpha(t) = \alpha(0) = 0, p_\alpha(t) = p_\alpha(0) = 0\}$$

2. $E_{min} < E < E_{sx}$ bzw. $0 < a < 1$

„Bindungszustand“, stets geschlossene Trajektorien, Libration um den Gleichgewichtszustand, Schwingungsregime

3. $E = E_{sx} = 2mgl$ bzw. $a = 1$

Separatrix, Grenzkurve trennt geschlossene Orbits von offenen Bahnkurven, Kriechbewegung, erreicht asymptotisch für $t \rightarrow \infty$ den Sattelpunkt $(\pm\pi, 0)$

4. $E > E_{sx}$ bzw. $a > 1$

„Streuzustand“, offene Trajektorien, Rotationsregime.

Das mathematische Pendel ist ein integrables System. Das Zeitverhalten $\alpha(t)$ folgt mittels Einsetzen von (92) in die Bewegungsgleichung (82). Nach

Abb. 10: Mathematisches Pendel im Schwingungsregime, $\varepsilon < \omega$ (Nobach, Mahnke, 1994).

Trennung der Variablen erhalten wir unter Verwendung des Halbwinkels $\beta = \alpha/2$ das Integral

$$\pm \omega t(\alpha) = \int \frac{d\beta}{\sqrt{a^2 - \sin^2 \beta}} . \quad (93)$$

Die expliziten Lösungstypen des Integrals (93) sollen hier kurz skizziert werden.

Entsprechend dem Wert des Kontrollparameters a (90) bzw. der Energie ε (87) können drei Fälle unterschieden werden. Für kleine Energiewerte $a < 1$ bzw. $\varepsilon < \omega$ erhalten wir anharmonische oszillatorische Lösungen. Das Librationsverhalten des mathematischen Pendels ist in der Abbildung 10 als Winkel–Zeit–Funktion dargestellt. Analytische Lösungen lassen sich für diesen Fall unter Verwendung der Jacobischen Elliptischen Funktion angeben. Dieses anharmonische Verhalten geht für kleine Auslenkungen bzw. verschwindender Energie $\varepsilon \rightarrow 0$ in die harmonische Schwingung über. Die Auswertung von (93) für $0 < a < 1$ liefert die in Abb. 10 dargestellten Kurven.

Untersuchen wir als zweiten Fall die Bewegung entlang der Separatrix (siehe Phasenraumporträt, Abb. 9). In diesem Grenzfall zwischen Schwingungs– und Rotationsregime ist $\varepsilon = \omega$ bzw. $a = 1$, somit vereinfacht sich (92) zu

$$p_{sx}(\alpha = \alpha_{sx}, a = 1) = \pm 2ml^2 \omega \sqrt{1 - \sin^2 \frac{\alpha_{sx}}{2}} \quad (94)$$

$$p_{sx} = \pm 2ml^2 \sqrt{\frac{g}{l}} \cos \frac{\alpha_{sx}}{2} . \quad (95)$$

Gleichung (95), in die Bewegungsgleichung (82) eingesetzt, liefert das Winkel–Zeit–Gesetz. Es gilt

Abb. 11: Kink- ($\eta = +1$) und Antikink- ($\eta = -1$) Lösung des mathematischen Pendels, $\varepsilon = \omega$ (Nobach, Mahnke, 1994).

$$\dot{\alpha}_{sx} = \frac{p_{sx}}{ml^2} = \pm 2\omega \cos \frac{\alpha_{sx}}{2} . \quad (96)$$

Nach Trennung der Variablen und Integration folgt

$$\pm 2\omega \int dt = \int \frac{d\alpha_{sx}}{\cos(\alpha_{sx}/2)} \quad (97)$$

$$\pm \omega t = \ln \tan \left(\frac{\alpha_{sx}}{4} + \frac{\pi}{4} \right) + C . \quad (98)$$

Nun ist diese Gleichung zu invertieren. Wir verwenden eine neue Integrationskonstante $D = e^{-C}$ und erhalten

$$\alpha_{sx}(t) = 4 \arctan [D \exp(\pm \omega t)] - \pi . \quad (99)$$

Diese Kink-Lösung (Schwelle, Stufe) bzw. Antikink-Lösung (Abb. 11) enthält noch die Konstante D , die aus der Anfangsbedingung zu bestimmen ist. Wegen $\alpha_{sx}(t=0) = \alpha_0 = 4 \arctan [D] - \pi$ folgt als Endergebnis die Gleichung (99) zusammen mit

$$D = \tan \left(\frac{\alpha_0}{4} + \frac{\pi}{4} \right) . \quad (100)$$

Für Anfangswinkel $\alpha_0 = 0$ gilt somit $D = \tan(\pi/4) = 1$. Starten wir im hyperbolischen Fixpunkt $\alpha_0 = \pm\pi$, so findet keine Bewegung statt.

Für den dritten Grenzfall ($a > 1$ bzw. $\varepsilon > \omega$, Rotationsfall) sind die Lösungstypen monotone Funktionen ohne Umkehrpunkte, und haben die Gestalt einer Treppe (Abb. 12). Das Pendel schlägt über und führt ungleichförmige Rotationen aus. Erst in der Grenze $\varepsilon \rightarrow \infty$ rotiert das mathematische Pendel gleichförmig.

Abb. 12: Das Rotationsregime des mathematischen Pendels, $\varepsilon > \omega$ (Nobach, Mahnke, 1994).

7 Diskrete Abbildungen

Liegen die dynamischen Bewegungsgleichungen in der Form von Differenzgleichungen vor, so heißt

$$x_{n+1} = f(x_n) \quad (101)$$

eine (eindimensionale) nichtlineare diskrete Abbildung. Ausgehend von einem Anfangswert x_0 ist diese Iteration, häufig in Abhängigkeit von Kontrollparametern, zu lösen. Die Folge der Werte x_n ($n = 0, 1, 2, \dots$) zeigt neben regulärem in der Regel auch chaotisches Verhalten. Das bekannteste Beispiel einer diskreten Abbildung auf dem Einheitsintervall ist die logistische Gleichung

$$x_{n+1} = f(x_n) \quad \text{mit} \quad f(x) = rx(1-x) \quad \text{für} \quad 0 < r \leq 4, \quad (102)$$

die das berühmte Feigenbaum–Diagramm liefert.

Bereits im Jahre 1892 äußerte sich Poincaré erstmalig über die Möglichkeit irregulärer Bewegungen in mechanischen Systemen. Wir zitieren aus Poincaré „Wissenschaft und Methode“ aus dem Jahre 1914 (nach Leven, Koch, Pompe, 1989):

Eine sehr kleine Ursache, die für uns unbemerkt bleibt, bewirkt einen beträchtlichen Effekt, den wir unbedingt bemerken müssen, und dann sagen wir, dass dieser Effekt vom Zufall abhängt. Würden wir die Gesetze der Natur und den Zustand des Universums für einen gewissen Zeitpunkt genau kennen, so könnten wir den Zustand dieses Universums für irgendeinen späteren Zeitpunkt genau vorhersagen. Aber selbst wenn die Naturgesetze für uns kein Geheimnis mehr enthielten, können wir doch den Anfangszustand immer nur näherungsweise kennen. Wenn wir dadurch in den Stand gesetzt werden, den späteren Zustand mit demselben Näherungsgrade voraussagen, so ist das alles, was man verlangen kann; wir sagen dann: Die Erscheinung wurde vorausgesagt, sie wird durch Gesetze bestimmt. Aber so ist es nicht immer; es kann der Fall eintreten, dass kleine Unterschiede in den Anfangsbedingungen große Unterschiede in den späteren Erscheinungen bedingen; ein kleiner Irrtum in den ersteren kann einen außerordentlich großen Irrtum für die letzteren nach sich ziehen. Die Vorhersage wird unmöglich und wir haben eine 'zufällige Erscheinung'.

Lange Zeit war die Existenz chaotischer Attraktoren umstritten; sie erschienen als Kuriosität. Doch 1963 konnte E. Lorenz zeigen, dass bei der Modellierung der Atmosphäre mittels eines Satzes von drei nichtlinearen Differentialgleichungen (Lorenz–Gleichungen) chaotisches Lösungsverhalten auftritt;

ein Grund für die sprichwörtliche Unberechenbarkeit des Wetters. Numerische Analysen, mit Hilfe der heutigen Computertechnik schnell und einfach durchführbar, und theoretische Untersuchungen zeigen: Chaotische Bewegungen bilden keine Ausnahme. Wir sprechen heute vom „Deterministischen Chaos“, d. h. von irregulären Bewegungen auf Basis deterministischer Bewegungsgleichungen. Ursache der Irregularität in nichtlinearen dynamischen Systemen, sowohl kontinuierlichen als auch diskreten, ist die empfindliche Abhängigkeit der Dynamik von den Anfangsbedingungen, so dass benachbarte Trajektorien exponentiell schnell divergieren und langfristige Vorausberechnungen praktisch unmöglich werden.

Das exponentiell schnelle Divergieren benachbarter Trajektorien wird qualitativ mit Hilfe des Ljapunov-Exponenten erfaßt.

Wählen wir den Anfangswert x_0 aus einem kleinen ε -Intervall $[x, x + \varepsilon]$, so liegt nach n Iterationen das Bild $f^n(x_0)$ in einem Intervall der Länge

$$|f^n(x + \varepsilon) - f^n(x)| = |(f^n)'(x)| \varepsilon + O(\varepsilon). \quad (103)$$

Vergleichen wir nun diese allgemeine Abbildung f mit dem exponentiellen Wachstumsgesetz (lineare Abbildung) der Form

$$x_{k+1} = ax_k \quad \text{mit} \quad a = e^\lambda. \quad (104)$$

In diesem Fall wird das Intervall $[x, x + \varepsilon]$ nach n Iterationen auf ein Intervall der Länge

$$|e^{\lambda n}(x + \varepsilon) - e^{\lambda n}(x)| = e^{\lambda n} \varepsilon \quad (105)$$

abgebildet. Ermitteln wir nun abschließend den Grenzwert $\varepsilon \rightarrow 0$ und $n \rightarrow \infty$, so gilt

$$e^\lambda = \lim_{n \rightarrow \infty} |(f^n)'(x_0)|^{1/n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\prod_{k=0}^{n-1} |f'(x_k)| \right)^{1/n}. \quad (106)$$

Logarithmieren wir diese Zahl, so erhalten wir den Ljapunov-Exponenten

$$\lambda(x_0) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} \ln |f'(x_k)|, \quad (107)$$

der die mittlere logarithmische Ausdehnungsrate entlang einer Trajektorie, die am Anfangswert x_0 startete, angibt.

Bei der praktischen numerischen Berechnung der Ljapunov-Exponenten hat

Abb. 13: Skizze zur Illustration der Renormierungen einer Störung z in Bezug auf die Trajektorie $x(t)$ zur Bestimmung des größten Ljapunov-Exponenten (nach Leven, Koch, Pompe, 1989).

sich der Benettin – Algorithmus bewährt (Benettin et al., 1976). Zu beachten ist, dass der Einschwingvorgang (z.B. die ersten 300 Iterationen) das Ergebnis verfälschen können und deshalb nicht berücksichtigt werden sollten. Der Ausgangspunkt sind dann ein so gewonnener typischer Anfangszustand x_0 und eine beliebige Anfangsstörung z_0 in der Größenordnung 10^{-6} . Im chaotischen Fall wächst $|z_n|$ für große n im Mittel exponentiell, so dass sich numerische Probleme ergeben können. Durch das häufige Zurücksetzen (im zeitdiskreten Fall nach jeder Iteration) der benachbarten Trajektorie erfolgt eine ständige Renormierung der Störung (siehe Abbildung 13). Diese renormierten Divergenzraten konvergieren für lange Zeiten gegen den größten Ljapunov-Koeffizienten λ_1 (Nese, 1989).

8 Die logistische Gleichung

Untersuchen wir mit Hilfe numerischer und analytischer Methoden die bekannte nichtlineare diskrete Abbildung (logistische Gleichung)

$$x_{n+1} = rx_n(1 - x_n)$$

für den Kontrollparameterbereich $0 < r \leq 4$ und Anfangswerte aus dem Einheitsintervall $0 \leq x_0 \leq 1$. Berechnen wir insbesondere

1. das Zeitverhalten für verschiedene Parameterwerte r bei unterschiedli-

chen Anfangswerten x_0 ,

2. das Langzeitverhalten x für $n \rightarrow \infty$ bei verschiedenen Parameterwerten r ,
3. eine Darstellung x über r (Feigenbaum–Diagramm),
4. die Fixpunkte und ihren Stabilitätskoeffizienten λ (Ljapunov–Exponent),
5. die ersten periodischen Lösungen (2er Zyklus) und ihre Stabilität,
6. den kritischen Kontrollparameter r_∞ für den Übergang zum Chaos und
7. das voll entwickelte Chaos bei dem Parameterwert $r = 4$.

Das berühmte Modellbeispiel einer eindimensionalen nichtlinearen diskreten Abbildung ist die logistische Gleichung

$$x_{n+1} = rx_n(1 - x_n) \quad (108)$$

mit einem Kontrollparameter r im Wertebereich $0 < r \leq 4$. Diese Iteration wurde erstmalig 1845 vom belgischen Biomathematiker P. F. Verhulst in einer Arbeit zur Populationsdynamik eingeführt (Französisch: Logis = Haus, Quartier). Die logistische Abbildung läßt sich aus einem einfachen nichtlinearen Wachstumsgesetz, bestehend aus einem linearen Term und einer quadratischen Dämpfung

$$y_{n+1} = f(y_n) = ry_n - sy_n^2, \quad (109)$$

herleiten. Die variable Größe y_n können Populationszahlen, die Höhe des Sparguthabens oder ähnliches für das Jahr n ($n \geq 0$) sein.

Ein wichtiger Grenzfall ist das lineare Wachstum ($s = 0$). Falls nur eine geringe Populationsmenge (y_n klein) vorhanden ist, so erfolgt ein unbeeinträchtigtetes Wachstum, allein determiniert durch die Nettoproduktionsrate $r > 0$.

Falls $p_{n+1} \simeq rp_n$ (lineares Wachstumsgesetz, 104) gilt, dann ist die Lösung als exponentielle Dynamik bekannt:

Abb. 14: Nichtlineare logistische Wachstumsfunktion $f(x) = rx(1 - x)$ für $r = 4$.

$$p_n = p_0 r^n \quad : \quad \text{exponentielle Dynamik}$$

$$r < 1 : p_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0 \quad : \quad \text{Aussterben der Population}$$

$$r = 1 : p_n = p_0 \quad : \quad \text{Stagnation}$$

$$r > 1 : p_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \infty \quad : \quad \text{Bevölkerungsexplosion}$$

Betrachten wir nun wiederum den vollständigen Ansatz (109) für die nicht-lineare Populationsdynamik in Abhängigkeit von den Parametern r und s , so können wir durch eine Variablentransformation die logistische Gleichung unter Verwendung genau eines Kontrollparameters r herleiten. Es gilt

$$x_n = \frac{s}{r} y_n \quad \iff \quad y_n = \frac{r}{s} x_n \quad (110)$$

$$y_{n+1} = r y_n - s y_n^2 \quad (111)$$

$$\frac{r}{s} x_{n+1} = r \frac{r}{s} x_n - s \frac{r^2}{s^2} x_n^2 \quad (112)$$

$$x_{n+1} = r x_n - r x_n^2 = r(x_n - x_n^2) \quad (113)$$

$$x_{n+1} = r x_n (1 - x_n) \quad \text{Logistische Abbildung} \quad (114)$$

Zu dieser diskreten Abbildung (siehe Abb. 14) mit einem Kontrollparameter $0 < r \leq 4$ gehört ein Anfangswert x_0 im Einheitsintervall $0 < x_0 < 1$ (ansonsten sind negative Populationszahlen möglich).

Der Algorithmus für die iterative Lösung der logistischen Abbildung lautet wie folgt:

- Fixiere Kontrollparameter: r ($r = 0.5$)

- Wähle beliebigen Startwert: x_0 ($x_0 = 0.1$)
- Trage x_n über n auf: x_1, x_2, \dots (geht schnell gegen 0)
- Konvergiert die Folge x_n gegen Grenzwert? : x ($x = 0$)
- Trage Grenzwert (bzw. Grenzwerte) über r auf.

Als Resultat erhält man das Feigenbaum-Diagramm.

Vorschlag für die Durchführung eines Computerexperimentes:

1. $r = 0.5$; $x_0 = 0.5$, $x_0 = 0.1$, $x_0 = 0.9$
nach wenigen Iterationen Konvergenz gegen $x = 0$
2. $r = 0.95$; $x_0 = 0.5$, $x_0 = 0.9$
erheblich langsamere Konvergenz gegen $x = 0$
3. $r = 1$; $x_0 = 0.5$, $x_0 = 0.001$
„Unendliche langsame“ Konvergenz gegen Null
4. $r = 1.2$; $x_0 = 0.001$
 x_n entfernt sich langsam vom Wert Null und konvergiert gegen $x = 0.16666\dots = 1/6$
5. $r = 2$; $x_0 = 0.001$
„superschnelle“ Konvergenz gegen $x = 0.5$
6. $r = 3.2$; $x_0 = 0.001$
→ stabiler 2-Zyklus: Bifurkation bei $r = 3$
7. $r = 3.5$; $x_0 = 0.5$
→ 4-Zyklus: $x = (0.8269 ; 0.5009 ; 0.8750 ; 0.3828)$
 2^k -Zyklen entstehen
8. $r = 4$, $x_0 = 0.0001$; $x_0 = 0.0002$; $\Delta x_0 = 10^{-4}$
→ voll entwickeltes Chaos
→ Lösungen divergieren exponentiell

Auf dem Computer könnte ein Programm zur Erstellung des Feigenbaum-Diagramms wie folgt aussehen:

1. Teile Wertebereich von r in I gleiche Abschnitte:
 $\Delta r = (r_{end} - r_{start})/I$
2. Wähle Startwert, z.B. $x_0 = 0.5$
3. Setze r mit $r := r_{start} + i\Delta r$ ($i = 0, 1, 2, 3, \dots, I$)
4. Führe Iterationen $x_{n+1} = rx_n(1 - x_n)$ aus
5. Trage die Iterationswerte x_n für große n (z.B. Ergebnisse der Zeitraumes $300 \leq n \leq 400$) auf, dieses liefert die Fixpunkte x
 Gehe zu 3.
6. Bringe alles in eine Darstellung x über r und das Feigenbaum – Diagramm (siehe Abbildung 15) entsteht

Im Jahre 1978 wurde erstmalig durch M. Feigenbaum das Verhalten des Systems „Logistische Abbildung“ (108) für lange Zeiten ($n \rightarrow \infty$) als Funktion des Kontrollparameters r dargestellt. Die Abbildung 15 zeigt das Resultat.

Die analytische Berechnung des Langzeitverhaltens des Systems erfordert die Kenntnis der Fixpunkte x , wobei für ein diskretes System analog zur dynamischen Gleichung $\dot{x} = f(x)$ die folgende Definition

x heißt Fixpunkt, wenn $x = f(x)$ gilt

existiert.

Die Berechnung der Fixpunkte x für die logistische Abbildung führt auf eine quadratische Gleichung

$$rx^2 + x(1 - r) = 0 \quad (115)$$

mit den Lösungen

$$x^{(1)} = 0 \quad \text{und} \quad x^{(2)} = 1 - \frac{1}{r}. \quad (116)$$

Berechnen wir nun die Stabilität der Fixpunkte, in dem wir das Verhalten von kleinen Störungen Δx_n in der Nähe der Fixpunkte mit Hilfe der ersten Ableitung untersuchen.

Wir betrachten zwei benachbarte Punkte (Trajektorien) x_n ; $y_n = x_n + dx_n$

Abb. 15: Das berühmte Feigenbaum–Diagramm für die logistische Abbildung (oben) einschließlich einer Darstellung des Ljapunov–Exponenten für die Parameterwerte $0 < r \leq 4$ (Nobach, Mahnke, 1994).

und nehmen eine Taylorentwicklung vor:

$$y_{n+1} \equiv x_{n+1} + dx_{n+1} = f(y_n) = f(x_n + dx_n) \quad (117)$$

$$x_{n+1} + dx_{n+1} \approx f(x_n) + f'(x_n)dx_n \quad (118)$$

$$dx_{n+1} = f'(x_n)dx_n \equiv \mu_n dx_n, \quad (119)$$

wobei

$$\mu_n = |f'(x_n)| = \begin{cases} > 1 & \text{Expansionsrate (instabil)} \\ < 1 & \text{Kompressionsrate (stabil)} \end{cases} \quad (120)$$

Bei einer exponentiellen Dynamik

$$dx_{n+1} = \mu dx_n \rightarrow dx_n = \mu^n dx_0 = e^{\lambda n} dx_0 \quad (121)$$

gilt mit $e^\lambda = \mu$ für den Ljapunov-Exponenten

$$\lambda = \ln \mu = \begin{cases} > 0 & \text{Instabilität} \\ < 0 & \text{Stabilität} . \end{cases} \quad (122)$$

Wegen (119) lautet im allgemeinen Fall $dx_n = dx_0 \prod_{i=0}^{n-1} \mu_i = dx_0 e^{\lambda n}$ der Ljapunov-Exponent wie folgt

$$\lambda = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{i=0}^{n-1} \ln \mu_i = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{i=0}^{n-1} \ln |f'(x_i)| . \quad (123)$$

Nach Berechnung der ersten Ableitung für die logistische Abbildung

$$\lambda = \ln \mu = \ln |f'(x)| = \ln |r(1 - 2x)| \quad (124)$$

an den Fixpunkten (116) folgt somit

$$\lambda^{(1)} = \ln [r|(1 - 2x^{(1)})|] = \ln r \quad (125)$$

$$\lambda^{(2)} = \ln [r|(1 - 2x^{(2)})|] = \ln [r|1 - 2 + 2/r|] = \ln |2 - r| . \quad (126)$$

Die Fixpunkte sind stabil für $\lambda < 0$ bzw. $\mu < 1$, d. h. kritische Werte des Kontrollparameters sind:

$$r_{cr}^{(1)} = 1 \rightarrow \text{Umschlag der Stabilität von } x^{(1)} = 0 \\ \text{nach } x^{(2)} = 1 - 1/r, \quad (127)$$

$$r_{cr}^{(2)} = 3 \rightarrow \text{Verlust der Stabilität von } x^{(2)}. \quad (128)$$

Somit erhalten wir das folgende Resultat (siehe Abb. 15, 16):

$$x^{(1)} = 0 \quad \text{ist stabil für } 0 < r \leq 1 \text{ mit } \lambda^{(1)} = \ln r \quad (129)$$

$$x^{(2)} = 1 - 1/r \text{ ist stabil für } 1 < r \leq 3 \text{ mit } \lambda^{(2)} = \ln |2 - r|. \quad (130)$$

Abb. 16: Darstellung des Stabilitätskoeffizienten λ (Ljapunov-Exponent) über dem Kontrollparameter r im Intervall $3.62 < r < 3.65$ (oben). Ausschnitt des zugehörigen Feigenbaum-Diagramms (unten) zum Vergleich (Nobach, Mahnke, 1994).

Neben den Fixpunkten (stationäre Zustände) existieren bei der logistischen Abbildung periodische Lösungen (2^k -Zyklen: $k = 1, 2, 3, \dots$), d. h. beim Langzeitverhalten pendelt die Variable x_n ständig zwischen 2^k Werten.

Wir untersuchen den einfachsten Fall eines 2er-Zyklus. Die Fixpunktgleichung lautet dann allgemein

$$x = f(f(x)) \equiv f^{(2)}(x) \quad (131)$$

und speziell in unseren Fall wegen

$$x_{n+2} = rx_{n+1}(1 - x_{n+1}) = r^2x_n(1 - x_n)(1 - rx_n(1 - x_n)) \quad (132)$$

gilt

$$x = r^2x(1 - x)(1 - rx(1 - x)) . \quad (133)$$

Wir formen die Gleichung um und erhalten

$$0 = x [r^2(1 - x)(1 - rx + rx^2) - 1] , \quad (134)$$

so dass wir die erste stationäre Lösung $x^{(1)} = 0$ (129) abspalten können

$$0 = r^2(1 - x)(1 - rx + rx^2) - 1 . \quad (135)$$

Analog verfahren wir mit dem zweiten bekannten Fixpunkt (130). Dazu bringen wir die Gleichung (135) in die folgende Form

$$\left[x - \left(1 - \frac{1}{r} \right) \right] \left[x^2 - \left(1 + \frac{1}{r} \right) x + \frac{1}{r} \left(1 + \frac{1}{r} \right) \right] = 0 , \quad (136)$$

spalten die Lösung $x^{(2)} = 1 - 1/r$ (130) ab und erhalten aus einer quadratischen Gleichung $x^2 + px + q = 0$ die ersten beiden periodischen Lösungen

$$x^{(3),(4)} = \frac{1}{2} \left(1 + \frac{1}{r} \right) \pm \sqrt{\frac{1 + 2/r + 1/r^2}{4} - \frac{1}{r} \left(1 + \frac{1}{r} \right) \frac{4}{4}} \quad (137)$$

$$= \frac{1}{2} \left(1 + \frac{1}{r} \right) \pm \frac{1}{2} \sqrt{1 + \frac{2}{r} + \frac{1}{r^2} - \frac{4}{r} - \frac{4}{r^2}}$$

$$= \frac{1}{2} \left(1 + \frac{1}{r} \right) \pm \frac{1}{2} \sqrt{1 - \frac{2}{r} - \frac{3}{r^2}}$$

$$x^{(3),(4)} = \frac{1}{2} \left(1 + \frac{1}{r} \right) \pm \frac{1}{2r} \sqrt{r^2 - 2r - 3} . \quad (138)$$

$x^{(3),(4)}$ (138) ist die erste periodische Lösung; sie ist stabil ab $r = 3$.
Für den Ljapunov-Exponenten

$$\lambda^{(3),(4)} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{2n} \sum_{i=0}^{n-1} \ln |f^{(2)'}(x_i)| \quad (139)$$

erhalten wir mit

$$f(x) = rx(1-x) \quad ; \quad f'(x) = r(1-2x) \quad (140)$$

$$f'(x^{(3)}) = r \left(1 - \left(1 + \frac{1}{r} \right) - \frac{1}{r} \sqrt{r^2 - 2r - 3} \right) \quad (141)$$

$$= - \left(1 + \sqrt{r^2 - 2r - 3} \right) \quad (142)$$

$$f'(x^{(4)}) = r \left(1 - \left(1 + \frac{1}{r} \right) + \frac{1}{r} \sqrt{r^2 - 2r - 3} \right) \quad (143)$$

$$= - \left(1 - \sqrt{r^2 - 2r - 3} \right) \quad (144)$$

somit

$$\lambda^{(3),(4)} = \frac{1}{2} \ln |f'(x^{(3)})f'(x^{(4)})| \quad (145)$$

$$= \frac{1}{2} \ln \left| \left(1 + \sqrt{r^2 - 2r - 3} \right) \left(1 - \sqrt{r^2 - 2r - 3} \right) \right| \quad (146)$$

$$= \frac{1}{2} \ln |1 - (r^2 - 2r - 3)| \quad (147)$$

$$= \frac{1}{2} \ln | -r^2 + 2r + 4 | . \quad (148)$$

Die kritischen Parametergrenzen folgen aus

$$\begin{aligned} -r^2 + 2r + 4 = -1 & \rightarrow r^2 - 2r - 4 - 1 = 0 \\ & \rightarrow r_{cr} = 1 \pm \sqrt{1+5} = 1 + \sqrt{6} \end{aligned} \quad (149)$$

$$\begin{aligned} -r^2 + 2r + 4 = +1 & \rightarrow r^2 - 2r - 4 + 1 = 0 \\ & \rightarrow r_{cr} = 1 \pm \sqrt{1+3} = 3 \end{aligned} \quad (150)$$

$$\begin{aligned} r^2 - 2r - 4 = 0 & \rightarrow r = 1 \pm \sqrt{1+4} \\ & \rightarrow r = 1 + \sqrt{5} \quad (\text{Symmetrieachse}) , \end{aligned} \quad (151)$$

somit gilt

$$x^{(3),(4)} \quad \text{ist stabil für} \quad 3 < r \leq 1 + \sqrt{6} . \quad (152)$$

Zusammenfassend liefert die Fixpunkt- und Stabilitätsanalyse (Ljapunov-Koeffizient λ) der logistischen Gleichung folgende Resultate:

$$\begin{array}{ll}
x^{(1)} = 0 & \text{stabil f\u00fcr } 0 < r \leq 1 ; \quad \lambda^{(1)} = \ln |r| \\
x^{(2)} = 1 - 1/r & \text{stabil f\u00fcr } 1 < r \leq 3 ; \quad \lambda^{(2)} = \ln |2 - r| \\
x^{(1)}, x^{(2)} & : \text{ stabile Fixpunkte}
\end{array}$$

$$\begin{array}{l}
x^{(3),(4)} = \frac{1}{2} \left(1 + \frac{1}{r} \right) \pm \frac{1}{2r} \sqrt{r^2 - 2r - 3} \\
\text{stabil f\u00fcr } 3 < r \leq 1 + \sqrt{6} ; \quad \lambda^{(3),(4)} = \frac{1}{2} \ln | -r^2 + 2r + 4 | \\
x^{(3),(4)} : \text{ stabile periodische L\u00f6sung (2er-Zyklus)}
\end{array}$$

Weitere analytische Berechnungen sind sehr aufwendig. Man erh\u00e4lt numerisch eine Serie von Bifurkationen. Die ersten Periodenverdopplungen liegen bei den folgenden Parameterwerten r_k (dort starten 2^k -Zyklen):

$$\begin{array}{llll}
r_1 = 3 ; & r_2 = 1 + \sqrt{6} = 3.449499 ; & r_3 = 3.544090 \\
r_4 = 3.564407 ; & r_5 = 3.568759 ; & r_6 = 3.569692 \\
r_7 = 3.569891 ; & r_8 = 3.569934 ; & \dots
\end{array}$$

Es existiert ein Grenzwert r_∞ , bei dem der \u00dcbergang ins Chaos erfolgt.

Betrachten wir im Vergleich das station\u00e4re, periodische und chaotische Verhalten der logistischen Abbildung:

a) **Station\u00e4res Regime** $[0, r_1 = 3]$

$$\begin{array}{ll}
0 < r < r_0 = 1 & \text{stabiler Fixpunkt } x^{(1)} = 0 \quad (129) \\
1 = r_0 < r < r_1 = 3 & \text{stabiler Fixpunkt } x^{(2)} \neq 0 \quad (130)
\end{array}$$

b) **Periodisches Regime** $[r_1 = 3, r_\infty]$

$$\begin{array}{ll}
r_1 < r < r_2 & \text{stabiler Orbit der Periode 2} \quad (138) \\
r_2 < r < r_3 & \text{stabiler Orbit der Periode 4} \\
\vdots & \\
r_n < r < r_{n+1} & \text{stabiler Orbit der Periode } 2^n \\
\vdots & \\
r = r_\infty & \text{stabile (aperiodische) Bahn der Periode } 2^\infty \rightarrow \infty
\end{array}$$

Die Bifurkationswerte r_k folgen einer geometrischen Reihe mit $r_k = r_1 q^{k-1}$; $r_{k+1} = r_k q$, d. h. das Skalenverhalten ist vom Typ

$$r_k \approx r_\infty - c \hat{F}^{-k}, \quad c = 2.6327 \quad (153)$$

$$\hat{F} = \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{r_{k+1} - r_k}{r_{k+2} - r_{k+1}} \quad (154)$$

$$= 4.669202 : \text{ universelle Feigenbaum-Konstante} \quad (155)$$

Bestimmen wir r_∞ als kritischen Kontrollparameter für den Übergang zum Chaos:

$$r_k = r_\infty - c\hat{F}^{-k} \quad (156)$$

$$r_{k+1} = r_\infty - c\hat{F}^{-(k+1)} \quad (157)$$

$$r_\infty = r_{k+1} + c\hat{F}^{-k}\hat{F}^{-1} = r_{k+1} + (r_\infty - r_k)\hat{F}^{-1} \quad (158)$$

$$r_\infty\hat{F} = r_{k+1}\hat{F} + r_\infty - r_k \quad (159)$$

$$r_\infty(\hat{F} - 1) = \hat{F}r_{k+1} - r_k \quad (160)$$

$$r_\infty = \frac{\hat{F}r_{k+1} - r_k}{\hat{F} - 1} = 3.5699456 \quad (161)$$

Beim Parameterwert $r_\infty \approx 3.57$ erfolgt der Übergang in den Chaos-Bereich.

c) Chaotisches Regime $[r_\infty, 4]$

Der chaotische Bereich hat periodische Fenster, sogenannte „Fenster der Ordnung im Meer des Chaos“. Diese r -Fenster sind charakterisiert durch Zyklen der Periodenlänge 3, 5, 6, ... und weiterer Bifurkationen. Das chaotische Intervall vergrößert sich mit steigendem r , wobei die Iterationen bei $r = 4$ den gesamten Wertebereich $[0, 1]$ überdecken. Wir sprechen dann bei $r = 4$ vom „voll entwickelten Chaos“.

Bei $r = r'_\infty = r_\infty$ beginnt der chaotische Bereich.

⋮

Für $r'_{n+1} < r < r'_n$ werden 2^n Intervalle nacheinander besucht.

⋮

Für $r'_2 < r < r'_1$ werden 2 Intervalle nacheinander besucht.

Für $r'_1 < r < r'_0 = 4$ existiert nur ein Aufenthaltsintervall maximaler Größe.

Im chaotischen Regime $[r_\infty, 4]$ existiert eine inverse Kaskade von Bifurkationen analog dem Feigenbaum – Szenario für den Bereich $[0, r_\infty]$. Die Abbildung 17 zeigt dieses schematisch.

Bei dem Parameterwert $r = 4$ haben wir ein exakt lösbares Modell, das chaotisches Verhalten zeigt, u. z.

$$x_{n+1} = 4x_n(1 - x_n) . \quad (162)$$

Obwohl bei $r = 4$ eine typische Trajektorie im gesamten Intervall $[0, 1]$ ziellos umherirrt, kann doch überraschenderweise die logistische Abbildung (162)

Abb. 17: Bifurkationskaskade im Bereich $r < r_\infty$ und ihr inverses Analogon für $r > r_\infty$ (nach Schuster, 1989).

durch eine Variablentransformation analytisch gelöst werden. Verwenden wir die folgende Transformation

$$x_n = \frac{1}{2} [1 - \cos(2\pi y_n)] \equiv h(y_n) , \quad (163)$$

so erhalten wir aus (162) mittels

$$\frac{1}{2} [1 - \cos(2\pi y_{n+1})] = \frac{4}{2} [1 - \cos(2\pi y_n)] [1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \cos(2\pi y_n)] \quad (164)$$

$$= [1 - \cos(2\pi y_n)] [1 + \cos(2\pi y_n)] \quad (165)$$

$$= 1 - \cos^2(2\pi y_n) \quad (166)$$

$$= 1 - \frac{1}{2} [1 + \cos(4\pi y_n)] \quad (167)$$

$$= \frac{1}{2} [1 - \cos(4\pi y_n)] \quad (168)$$

das Resultat

$$\frac{1}{2} [1 - \cos(2\pi y_{n+1})] = \frac{1}{2} [1 - \cos(4\pi y_n)] \quad (169)$$

mit der Lösung

$$y_{n+1} = 2y_n \pmod{1} \quad \text{bzw.} \quad y_n = 2^n y_0 \pmod{1} . \quad (170)$$

Einsetzen in (163) liefert

$$x_n = \frac{1}{2} [1 - \cos(2\pi 2^n y_0)] = \sin^2(\pi 2^n y_0) , \quad (171)$$

wobei wegen $x_0 = \frac{1}{2}[1 - \cos(2\pi y_0)] = \sin^2(\pi y_0)$ für den Startwert y_0 gilt

$$y_0 = \frac{1}{2\pi} \arccos(1 - 2x_0) = \frac{1}{\pi} \arcsin \sqrt{x_0} . \quad (172)$$

Die elementare Lösungsfunktion lautet somit

$$x_n = \sin^2(2^n \arcsin \sqrt{x_0}) , \quad (173)$$

wobei $0 < x_0 < 1$ eine rationale bzw. irrationale Startzahl $x_0 = q/p$ (q, p - ganzzahlig) sein kann. Diese führt zu unterschiedlichen Konsequenzen, so liefern rationale Startzahlen Fixpunkte und periodische Zahlenfolgen, z. B.

$$\begin{array}{ll} x_0 = 0 & \rightarrow x = 0 \\ x_0 = \frac{1}{3} & \rightarrow x = \frac{3}{4} \\ x_0 = \frac{1}{5} & \rightarrow 2\text{er Zyklus } x = (5 \pm \sqrt{5})/8 \\ x_0 = \frac{1}{7} & \rightarrow 3\text{er Zyklus ,} \end{array}$$

während irrationale Startwerte chaotisches Umherirren der Trajektorie produzieren. Der Ljapunov-Exponent hat für $r = 4$ den Wert $\lambda = \ln 2$.

Abschließend sei auf folgende Fragen hingewiesen:

- Was hat das Ganze mit Physik zu tun?
 - ↔ Konzepte, Methoden sind nützlich für viele Fragestellungen aus der Biologie, Medizin, ...
- Hat die logistische Gleichung physikalische Relevanz?
 - ↔ Es ist zwar „nur“ eine Modellgleichung für nichtlineare Systeme, aber sie zeigt alles Typische für diskrete nichtlineare Systeme, so die Bifurkationskaskade für den Weg zum Chaos (Feigenbaum-Szenario), die sensitive Abhängigkeit von der Änderung der Anfangsbedingungen u.v.a.m.
- Was kann man analytisch berechnen?
 - ↔ Insbesondere das Langzeitverhalten und seine Stabilität.

Es dauerte aber immerhin ca. 10 Jahre, ein solch „einfaches“ Modell wie die logistische Gleichung vollständig zu verstehen.

9 Selbstähnlichkeit und Fraktale

Liegen die dynamischen Bewegungsgleichungen in linearer Form vor, so gilt für die Naturbeschreibung das Überlagerungsprinzip, d.h. eine Superposition von Lösungen einer linearen Bewegungsgleichung ist ebenfalls Lösung dieser Gleichung. Dieses Additionsprinzip

$$x_1(t) + x_2(t) = x_S(t) \quad (174)$$

ist grundlegend für alle Prozesse, deren Grundgleichungen linear sind. Die Gleichung (174) ist die mathematische Äquivalenz für die Aussage, dass das (lineare) Ganze genau die Summe seiner Teile ist. Das bekannteste Beispiel für diesen Sachverhalt sind die harmonisch gekoppelten Schwinger, die mit Hilfe der Normalmodenanalyse entkoppelt werden können, so dass sich die Gesamtlösung als Summe der Lösungen der unabhängigen Teilsysteme ergibt. Zu nennen sind neben den harmonischen mechanischen und elektromagnetischen Schwingungen auch die Holographie mit der Überlagerung von Bildsignal und Referenzstrahl, die Maxwell-Gleichungen, insbesondere elektrostatische Erscheinungen als Superposition von Coulomb-Feldern und die Quantenmechanik mit der linearen Schrödinger-Gleichung (Superposition der Wahrscheinlichkeitsamplituden).

Im Gegensatz dazu gilt für die nichtlineare Physik das hierarchische Prinzip von Selbstähnlichkeit und Skalenverhalten. Für das (nichtlineare) Ganze gilt nicht mehr die einfache Summenformel (174). Bei der Herausbildung von Ordnungsstrukturen in nichtlinearen Systemen wird das Fehlen eines natürlichen Maßstabes beobachtet. Oftmals ist das Lösungsverhalten $x(t)$ auf unterschiedlichen Zeitskalen t ähnlich. Diese Skalenähnlichkeit bzw. Affinanz wird durch einen positiven Streck- oder Stauchfaktor λ und einen Skalenexponenten ν beschrieben und lautet

$$x(\lambda t) = \lambda^\nu x(t) . \quad (175)$$

Aus dieser Selbstähnlichkeitsrelation läßt sich das zeitliche Verhalten als Potenzgesetz bestimmen, indem der Parameter λ so gewählt wird, dass das Produkt $\lambda t = c$ konstant bleibt. Das Potenzgesetz

$$x(t) \sim t^\nu , \quad (176)$$

wobei die t -Streckung durch eine entsprechende x -Skalierung kompensiert wird, und die Skaleninvarianz bedingen einander gegenseitig und sind Ausdruck, wie bereits erwähnt, für das Fehlen eines natürlichen Zeitmaßstabes

bei den untersuchten nichtlinearen Phänomenen.

Die bislang für zeitliche Abläufe erläuterten Aussagen gelten analog auch für räumliche Strukturen. Sind die Ordnungsparametergleichungen nichtlinear, so fehlt in diesem Fall ein natürlicher Längenmaßstab. Die Physik der Phasenübergänge (Renormierungsgruppentheorie nach Kadanoff und Wilson) ist ein typisches Beispiel dafür. Skalenunabhängige Phänomene heißen im allgemeinen allometrisch (Großmann, 1990).

Für die isotherme Kompressibilität κ_T gilt in der Nähe des Phasenübergangs (T_c ist die kritische Temperatur) das Potenzgesetz

$$\kappa_T \sim |T - T_c|^{-\nu} \quad (177)$$

mit dem kritischen Exponenten ν . Im Fall eines van der Waals-Gases gilt für den Exponenten der ganzzahlige Wert $\nu = 1$.

Fraktale sind selbstähnliche Strukturen, in denen die Meßgrößen (z.B. die Länge zwischen zwei Punkten) von der Feinheit des Maßstabes zum Messen abhängen. So lassen sich in Fraktalen auf den ersten Blick keine skalenunabhängigen Größen angeben, da sich aufgrund der ständigen Verfeinerungen und Wiederholungen nur maßstabsabhängige Zahlen finden lassen. Bezeichnen wir die Maßstabslänge der n -ten Verfeinerung mit ε , so gilt für die Meßgröße $N(\varepsilon)$ ein Skalenverhalten des Typs

$$N(\lambda\varepsilon) = \lambda^\nu N(\varepsilon) \quad (178)$$

und damit das Potenzgesetz

$$N(\varepsilon) \sim \varepsilon^{-\nu} = \frac{1}{\varepsilon^{d_F}}. \quad (179)$$

Anstelle des Skalenexponenten ν wird jetzt die fraktale Dimension $d_F = -\nu$ verwendet. Im Grenzwert ständiger Verfeinerungen $n \rightarrow \infty$ gilt für die fraktale Dimension

$$d_F = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{\ln N(\varepsilon)}{\ln(1/\varepsilon)}. \quad (180)$$

Eine Möglichkeit, die fraktale Dimension von Kurven, Flächen und höherdimensionalen Gebilden (Menge A) zu bestimmen, ist die Überdeckungsmethode. Dazu wird A mit endlich vielen kleinen Einheiten (Quadrate der Kantenlänge ε bzw. Kugeln mit Radius ε oder ähnlichem der Größe ε) überdeckt. Mittels Auszählen wird die minimale Anzahl $N(A, \varepsilon)$ von Einheiten bestimmt, die A vollständig überdecken. Anschließend wird ε verkleinert

und die Prozedur wiederholt. Aus dem Anstieg der Funktion $N(A, \varepsilon)$ über $1/\varepsilon$ (in logarithmischer Darstellung näherungsweise eine Gerade) läßt sich die fraktale Dimension d_F des Objektes A bestimmen.

Haben nicht alle Einheiten die gleiche Ausdehnung ε , sondern werden unterschiedliche Maßstäbe ε_i zugelassen, so liefert die Überdeckung mit den ε_i eine gebrochene Dimension d_H (Hausdorff-Dimension), die stets kleiner als die (üblicherweise in der Physik verwendete) fraktale Dimension d_F ist. Glatte (nichtfraktale) Objekte haben die bekannten euklidischen Dimensionen $d = 1, 2, 3, \dots$ der Linie, der Fläche, des Volumens usw.

Während mathematische Fraktale, die in der einfachsten Form auf zweidimensionalen linearen affinen Abbildungen f basieren

$$f \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix}, \quad (181)$$

eine unbegrenzte Selbstähnlichkeit über alle Größenklassen (Verfeinerungen) besitzen, sind reale Fraktale in der Natur in der Regel nur selbstähnlich über einen begrenzten Bereich von Skalenfaktoren. Eine Ursache ist das komplizierte Wechselspiel zwischen verschiedenen linearen und nichtlinearen Faktoren.

Bei zahlreichen Aggregationsprozessen (Verdampfung von Eisen und Kondensation im Vakuum, Ausfällung aus einer wässrigen Lösung, Aggregation bei der Herausbildung von Silicagelen) entstehen Cluster mit fraktalen Eigenschaften. Hierbei unterscheidet man zwischen Teilchen-Cluster-Aggregation und Cluster-Cluster-Aggregation. Beim zuerst genannten Prozeß werden frei diffundierende Teilchen (Monomere) an einen ortsfesten Cluster angelagert. Es entstehen fraktale Gebilde, die ein Zentrum besitzen. Bei der Cluster-Cluster-Aggregation reagieren (bewegliche) Cluster aller Größen miteinander. Das Resultat dieses Prozesses sind nichtzentrale Gebilde wie in Abbildung 18 dargestellt.

Eine theoretische Deutung der entstehenden diffusionslimitierten Aggregationscluster (DLA-Cluster) kann im einfachsten Fall im Rahmen des Witten-Sander-Modells vorgenommen werden. Bei der numerischen Simulation dieses Prozesses wird ein Teilchen im Zentrum plaziert. Weitere Teilchen beginnen eine Zufallsbewegung auf einer Oberfläche mit dem Radius r_1 ; kommen diese Teilchen bei der Zufallswanderung in die Umgebung des zentralen Teilchens bzw. Aggregats, so erfolgt – nach definierten Regeln – eine Anlagerung. Beim Überschreiten eines weiten Abstandes r_2 ($\gg r_1$) wird das Teilchen eliminiert und damit der Prozeß neu gestartet. Der erläuterte Algorithmus stellt

Abb. 18: Beispiel für ein zweidimensionales Cluster-Cluster-Aggregat aus ca. 5000 Teilchen (nach Tietze, 1992).

eine numerische Realisierung eines Diffusionsprozesses dar, beschrieben durch eine zeitunabhängige Diffusionsgleichung

$$\Delta c = 0, \quad (182)$$

wobei c die Konzentration der Teilchen ist. Analog führen auch andere Prozesse, die durch eine Laplace – Gleichung (182) beschrieben werden können, zur Ausbildung fraktaler Objekte.

Beispiele dafür sind:

a) die Wärmeleitung bei Erstarrungsprozessen

$$\Delta T = 0 \quad (183)$$

mit dem Dendritenwachstum,

b) Auflösungsprozesse poröser Medien

$$\Delta c = 0 \quad (184)$$

mit fraktalen Hohlraumstrukturen, wie z.B. in Koks und Gips,

c) elektrische Phänomene (V ist das elektrische Potential)

$$\Delta V = 0 \quad (185)$$

mit fraktale Mustern beim elektrischen Durchbruch und elektrischen Entladungen, den sog. Lichtenbergschen Figuren, und

d) die Druckausbreitung in Festkörpern bzw. Flüssigkeiten

$$\Delta p = 0 . \quad (186)$$

Neben der schon klassischen Aufgabe „Wie lang ist die Küste Großbritanniens?“ (Kurzantwort: $d_F \simeq 1.25$, d.h. die Küstenlänge ist maßstabsabhängig) werden jetzt verstärkt in der Biologie (Physiologie der Tiere und Pflanzen) fraktale Strukturen untersucht. Beispiele sind Mechanismen (Transportprozesse), die weniger als volumenfüllend aber mehr als flächig sind, wie das Wurzelsystem der Pflanzen, die Adernstruktur bei Blättern, Schwämmen, Korallen, Kiemen, Lungen, die fraktale Verzweigung des Blutgefäßsystems und Nervensystems. Die fraktale Geometrie der Natur im Überblick liefern u. a. die Fachbücher (Mandelbrot, 1982) und (Kaye, 1989).

10 Nichtlinearität 3. Grades

Anhand der einfachen Gleichung

$$\dot{x} = -ax - bx^3 \quad ; \quad x(0) = x_0 , \quad (187)$$

bestehend aus einem linearen Term und einer nichtlinearen Potenzfunktion 3. Grades, die begrenzte Selbstähnlichkeit zu untersuchen. Es ist zu zeigen, dass bei einer großen „Reynoldszahl“ $Re = x_0^2 b/a \gg 1$ Skaleninvarianz auftritt. Insbesondere sind die beiden Grenzfälle zu betrachten: Lineares Verhalten, Superpositionsprinzip ($b = 0$) und reine Nichtlinearität, Selbstähnlichkeit über alle Skalenfaktoren ($a = 0$).

Laut Aufgabenstellung ist die Bewegung des o. g. Systems hinsichtlich seiner Skaleninvarianz in einem begrenzten Bereich zu analysieren.

Betrachten wir zuerst das lineare System ($b = 0$), so wissen wir, dass für diesen dissipativen Prozeß (gewöhnliche Reibung) das Überlagerungsprinzip gilt. Die Lösung ist eine Exponentialfunktion. Sie läßt sich als Superposition schreiben, u. z. für zwei Anfangsbedingungen

$$x_1 = x_{01} \exp(-at) \quad ; \quad x_2 = x_{02} \exp(-at) \quad (188)$$

folgt wiederum

$$x_S(t) = (x_{01} + x_{02}) \exp(-at) = x_{0S} \exp(-at) . \quad (189)$$

Abb. 19: Lösungsverhalten (exakte Lösung und Näherung für große Zeiten) für eine reine Nichtlinearität 3. Grades mit $b = 1$ und Kennzeichnung der Selbstähnlichkeit (Nobach, Mahnke, 1994).

Für das reine nichtlineare System

$$\dot{x} = -bx^3 \quad ; \quad x_0 = 0 \quad \text{mit } b > 0 \quad (190)$$

gilt das Skalenprinzip uneingeschränkt über alle Größenklassen (Zeitskalen). Die exakte Lösung von (190) lautet unter Berücksichtigung der Anfangsbedingung

$$x(t) = \frac{x_0}{\sqrt{1 + 2bx_0^2 t}} . \quad (191)$$

Bemerkenswert ist, dass nach einer kurzen Initialisierungsphase der t -Summand im Nenner von (191) überwiegt, so dass näherungsweise für große Zeiten ($t > 2bx_0^2$) unabhängig vom Anfangswert gilt

$$x(t) \simeq \frac{1}{\sqrt{2bt}} \sim t^{-\frac{1}{2}} . \quad (192)$$

Das Lösungsverhalten $x \sim t^{-1/2}$ (Potenzgesetz) ist auf unterschiedlichen Zeitskalen ähnlich, wie aus der Abbildung 19 deutlich wird.

Für das bisher ermittelte Potenzgesetz (192)

$$x(t) = (2bt)^\nu \quad \text{mit } \nu = -1/2 \quad (193)$$

wird die t -Streckung durch eine x -Skalierung aufgefangen

$$t \rightarrow \lambda t \quad : \quad x(\lambda t) = (2b\lambda t)^{-1/2} = \lambda^{-1/2} x(t) \quad (194)$$

(z.B. Zeit verneunfacht $\lambda = 9$, Amplitude gedrittelt $x(\lambda t)/x(t) = 9^{-1/2} = 1/3$), so dass das Prinzip der Selbstähnlichkeit (175)

$$x(\lambda t) = \lambda^\nu x(t) \quad \text{mit} \quad \nu = -1/2 \quad (195)$$

für alle Streck- bzw. Stauchfaktoren $\lambda > 0$ gültig ist. Der Parameter b aus (190) spielt in diesen Fällen keine Rolle, da er im Gegensatz zum linearen Beispiel nicht als Zeitkonstante $\tau = 1/a$ fungiert.

Kehren wir nun zur Ausgangsgleichung (187) zurück und zeigen, dass die Skaleninvarianz in der Regel nur über einen begrenzten Bereich von Skalenfaktoren gilt. Die Ursache für diese begrenzte Selbstähnlichkeit liegt im Wechselspiel zwischen Linearität und Nichtlinearität.

Die Integration der Bewegungsgleichung (187) liefert (ein Formelmanipulationssystem zeigt das Ergebnis in Sekundenschnelle auf dem Computerbildschirm an) die Lösung

$$x(t) = \left[-\frac{b}{a} + \left(\frac{b}{a} + \frac{1}{x_0^2} \right) \exp(2at) \right]^{-1/2}. \quad (196)$$

Dieser Resultat legt nahe, einen dimensionslosen Parameter

$$Re = \frac{b}{a} x_0^2 \quad (197)$$

einzuführen, den wir nach einem Vorschlag von (Großmann, 1990) auch „Reynoldszahl“ nennen. Bei gleichzeitiger Benutzung dimensionsloser Variablen

$$X = \frac{x}{x_0} \quad ; \quad T = \frac{t}{\tau} = at \quad (198)$$

besitzen sowohl die Bewegungsgleichung (187)

$$\frac{dX}{dT} = -X - Re X^3 \quad (199)$$

als auch die Lösung (196)

$$X(T) = [-Re + (1 + Re) \exp(2T)]^{-1/2} \quad (200)$$

eine sehr übersichtliche Form. Ist der lineare Term in (200) vergleichsweise zum nichtlinearen deutlich kleiner, d.h. es gilt $a \ll bx_0^2$ bzw. $Re \gg 1$, so können wir näherungsweise die Resultate (191, 192) verwenden. Andererseits gilt für $Re \ll 1$ das exponentielle Zerfallsgesetz $X(T) = \exp(-T)$ als

Abb. 20: Exaktes Zeitverhalten (durchgezogene Kurve) und verschiedene Näherungen für ein gemischtes System (Linearität und Nichtlinearität 3. Grades) mit einer Reynoldszahl $Re = 5$ (Nobach, Mahnke, 1994).

gute Näherung (exakt für $Re = 0$). Das Langzeitverhalten ist in jedem Fall exponentiell. Wir erhalten aus (200) durch Reihenentwicklung

$$X(T) \simeq \frac{1}{\sqrt{Re}} \exp(-T) . \quad (201)$$

Die Analyse des Systemverhaltens von (187), bzw. unter Verwendung von (197, 198) in dimensionsloser Form (199), zeigt (siehe Abb. 20) für den Fall großer Reynoldszahlen $Re \gg 1$ näherungsweise drei Etappen:

1. **Transientregime**

Kurzzeitverhalten $0 \leq T \lesssim 1/(2Re)$
Anfangswert dominiert

$$X(T) \simeq X(0) = 1 \quad (202)$$

2. **Ähnlichkeitsregime**

Mittleres Zeitintervall $1/(2Re) \lesssim T \lesssim 1/2$
Potenzgesetz (192) der Form

$$X(T) = \frac{1}{\sqrt{1 + 2ReT}} \simeq \frac{1}{\sqrt{2ReT}} \sim T^{-\frac{1}{2}} \quad (203)$$

3. **Superpositionsregime**

Langzeitverhalten $1/2 \lesssim T < \infty$

Exponentialgesetz (201) der Form

$$X(T) \simeq \frac{1}{\sqrt{Re}} \exp(-T). \quad (204)$$

Ist $Re \leq 1$, so entfällt das Ähnlichkeitsregime (203), da der lineare Term in der Bewegungsgleichung (199) dominiert.

Zusammenfassend läßt sich für unser Beispiel feststellen:

- a) Nur für große Reynoldszahlen ($Re \gg 1$) tritt überhaupt Skaleninvarianz (fraktale Dimension $d_F = -\nu = 1/2$) auf, u. z. nur innerhalb eines gewissen mittleren Zeitintervalls.
- b) Zeitverläufe mit unterschiedlichen Parametern a, b, x_0 sind ähnlich, wenn sie dieselbe Reynoldszahl $Re = x_0^2 b/a$ haben (Reynoldssches Ähnlichkeitsgesetz).

11 Koch–Kurve

Betrachten wir das folgende mathematische Fraktal, dessen Konstruktionsvorschrift der schwedische Mathematiker Helge von Koch erstmalig 1904 angab: Eine Basisgrade wird in drei gleiche Abschnitte geteilt, der mittlere Teil durch ein gleichseitiges Dreieck dieser Länge ersetzt und anschließend die Grundseite des Dreiecks entfernt. Eine ständige Wiederholung dieser Prozedur führt auf die Koch–Kurve, dessen fraktale Dimension sowohl analytisch aus dem Skalengesetz als auch numerisch mittels Überdeckungsmethode zu bestimmen ist. Erweitern wir den Algorithmus auf die Konstruktion von regulären Koch–Schneeflocken und solche mit einem Zufallselement.

Die Konstruktion eines idealen Fraktals, der Koch–Kurve, wurde erstmalig durch den Schwedischen Mathematiker Helge von Koch beschrieben. Die Originalarbeit erschien im Jahre 1904 im 1. Band des *Arkiv för Matematik*, ein weiterer Artikel zwei Jahre später im Journal *Acta Mathematica* (Koch, 1904, 1906). Die Abbildung 21 zeigt die Konstruktionsprozedur aus der Originalarbeit von Koch.

Ausgangspunkt ist eine Linie der Länge ℓ_0 (setze $\ell_0 = 1$). Diese Basisgrade wird in drei gleiche Abschnitte der Länge $\ell_0/3$ geteilt, der mittlere Teil durch ein gleichseitiges Dreieck dieser Länge ersetzt und anschließend die Grundseite des Dreiecks entfernt. In diesem ersten Schritt sind bei der Drittung vier

Abb. 21: Ausschnitt aus einem Originalartikel von H. v. Koch mit der Konstruktionsvorschrift für die fraktale Koch-Kurve (nach Peitgen, Jürgens, Saupe, 1992).

Teilstrecken entstanden. Nun wird auf jeder Teilstrecke der Länge $\ell_0/3$ diese Prozedur wiederholt. Im zweiten Schritt entstehen somit 4^2 Teilgeraden der Länge $\ell_0/3^2$. Diese Konstruktion wird nun ständig fortgeführt: Skalierung der 4 Teile um den Faktor 3. In der Grenze ständiger Verfeinerungen $n \rightarrow \infty$ bzw. Maßstabslänge $\varepsilon \rightarrow 0$ entsteht somit eine Strecke (euklidische Dimension $d = 1$) mit unendlicher Länge. Da der Flächeninhalt (euklidische Dimension $d = 2$) Null ist, erwarten wir für die Koch-Kurve eine fraktale (gebrochene) Dimension mit $1 < d_F < 2$.

Seien ε die Maßstabslänge der n -ten Verfeinerung (als der Bruchteil der Ausgangslänge ℓ_0) und $N(\varepsilon)$ die Anzahl von Teilstrecken dieser Größe, so gilt für den beschriebenen hierarchischen Prozeß der Koch-Kurve in der n -ten Stufe

$$\varepsilon = \frac{1}{3^n} \quad ; \quad N(\varepsilon) = 4^n . \quad (205)$$

Verwenden wir jetzt als maßstabsunabhängige Größe die bereits eingeführte fraktale Dimension d_F (180), dann erhalten wir aus dem Potenzgesetz für selbstähnliche Objekte (Fraktale)

$$N(\varepsilon) = \varepsilon^{-d_F} \quad (206)$$

mit (205) das Resultat

$$d_F = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{\ln N(\varepsilon)}{\ln(1/\varepsilon)} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\ln 4^n}{\ln 3^n} = \frac{\ln 4}{\ln 3} \simeq 1.261 . \quad (207)$$

Die fraktale Dimension der Koch-Kurve beträgt somit $d_F = \ln 4 / \ln 3 \simeq 1.26$.

Eine Überprüfung dieses Resultates mit der Überdeckungsmethode (auch als Box-Counting-Methode bekannt) zeigt die Abbildung 22. Dazu wird ein Raster (Gitter) aus Quadraten (Boxen) der Kantenlänge ε ($1 \geq \varepsilon > 0$) über eine Koch-Kurve der n -ten Iteration ($n \gg 1$) gelegt. Dann wird die Überdeckungszahl $N(\varepsilon)$ als minimale Anzahl der Quadrate bestimmt, durch die die Koch-Kurve hindurchgeht. Anschließend werden die Boxen sukzessive verkleinert und die Zählungen wiederholt. Wir erhalten bei logarithmischer Auftragung von N über $1/\varepsilon$ Punkte, die näherungsweise auf einer Geraden liegen. Der Anstieg dieser (genäherten) Geraden ist die Box-Counting-Dimension d_B . Dieser experimentell gewonnene Wert stimmt sehr gut mit der theoretisch bestimmten fraktalen Dimension d_F des Objektes überein.

In unserem Beispiel, der Koch-Kurve, lesen wir aus dem Diagramm der Abb. 22 (untere Grafik) eine computerexperimentell ermittelte Dimension

Abb. 22: Experimentelle Bestimmung der fraktalen Dimension der Koch-Kurve mithilfe der Überdeckungsmethode (Nobach, Mahnke, 1994).

Abb. 23: Beispiel einer Koch-Kurve mit einem Zufallselement (Nobach, Mahnke, 1994).

$d_B \approx 8.0/6.2 = 1.29$ ab. Dieser Wert der Box-Counting-Dimension ist näherungsweise in Übereinstimmung mit dem exakten Resultat $d_F = 1.26$ (207).

Die Generierung der Koch-Kurve (siehe Abb. 21) erfolgt nach einem einfachen Algorithmus. Bauen wir in dieses Bildungsgesetz ein Zufallselement ein, so dass eine zufällige Auswahl unter zwei oder mehreren Möglichkeiten vorgenommen werden muß, so entstehen stochastische Koch-Kurven. Die Abbildung 23 zeigt ein solches Beispiel, wobei unter drei Generatoren zufällig gewählt wurde. Die erste Möglichkeit ist die normale Prozedur (Spitze nach oben), die zweite die dazu inverse (Spitze nach unten), bei der dritten Variante passiert gar nichts (keine Spitze). Der Zufall in fraktalen Konstruktionen (Chaotisierung deterministischer klassischer Fraktale) ist der erste und einfachste Ansatz für die Erzeugung wirklichkeitsnaher Formen (Peitgen, Jürgens, Saupe, 1992).

12 Theoretische Mechanik: Newton'sche Formulierung

Deterministische Dynamik: Newtonsche Bewegungsgleichung(en) plus Anfangsbedingungen.

7. Newtonsche Dynamik I (48. KW, R. Mahnke)

Wiederholung Ortsvektor \vec{r} , Geschwindigkeit $\vec{v} = \dot{\vec{r}}$ und Beschleunigung $\vec{a} = \dot{\vec{v}} = \ddot{\vec{r}}$.

Beispiel: Gleichförmige Kreisbewegung (Bewegung mit konstanter Winkelgeschwindigkeit auf einer Kreisbahn) $\ddot{\vec{r}} = -\omega^2 \vec{r}$.

Beispiel: Harmonischer Oszillator (eindimensionaler Federschwinger), Bahnkurve $x(t) = A \sin(\omega t + \phi)$ ist Lösung der Gleichung $x''(t) = -\omega^2 x(t)$.

Kraft \vec{F} ist Ursache der Bewegung: $\ddot{\vec{r}} \sim \vec{F}$.

Die klassische (Newtonsche) Mechanik handelt von Newtons II. Axiom $m\ddot{\vec{r}} = \vec{F}$. Gesucht ist die Bahn (Trajektorie) $\vec{r}(t)$ einer Masse m bei einer Frafteinwirkung \vec{F} unter Berücksichtigung der Anfangsbedingungen.

Die Kinematik behandelt den einfachen Fall einer kräftefreien Bewegung $m\ddot{\vec{r}} = 0$.

Beispiele für Kräfte: Gravitationskraft, Coulombkraft, Schwerkraft, Kraft im äußeren elektrischen bzw. magnetischem Feld (Lorentzkraft), Mehrteilchenkräfte (Zweikörperproblem), harmonische Kraft $F(x) = -kx$, Reibungskraft, äußere (periodische) Anregung, etc

Zusammenfassung: Grundgleichung der Newtonschen Mechanik

$$m\ddot{\vec{r}}(t) = \vec{F}(\vec{r}, \dot{\vec{r}}, t)$$

mit Anfangsbedingungen

$$\vec{r}(t=0) = \vec{r}_0 \quad ; \quad \dot{\vec{r}}(t=0) = \vec{v}_0 .$$

Beispiel zur Behandlung in der Übung: **Harmonischer Oszillator**

Modell des Federschwingers (lineares Modell), Hook'sches Gesetz, Federkraft, Newton'sche Bewegungsgleichung, Anfangsbedingungen, dynamisches System aus zwei gekoppelten Bewegungsgleichungen, verschiedene Lösungsmethoden (exp-Ansatz, Eigenvektoren, Energieerhaltung). Ermittlung der zeitabhängigen Lösungen $x = x(t)$ (Ort über

Zeit) und $v = v(t)$ (Geschwindigkeit über Zeit) des Federschwingers. Eventuell zuerst lineare Transformation der Ortskoordinate zur Verschiebung des Koordinatenursprungs. Verschiedene Lösungsmethoden:

- 1.) Anwendung der Energieerhaltung
- 2.) Anwendung des Ansatzes $\exp(\lambda t)$
- 3.) Berechnung von Eigenwerten und Eigenfunktionen

Die mathematische Form der Lösungen ist unterschiedlich. Sie können aber ineinander überführt werden. Es gibt nur eine physikalische Lösung des Federschwingers, aber verschiedene mathematische Schreibweisen.

8. Newtonsche Dynamik II (49. KW, R. Mahnke)

Mehrteilchensystem aus N (Punkt-)Teilchen: $3N$ gekoppelte Newton-Differentialgleichungen sind zusammen mit Anfangsbedingungen für Ort und Geschwindigkeit als Anfangswertproblem zu lösen. Aber wie? Analytisch bzw. Computeralgebra, numerisch (Euler-Cauchy, . . . , Runge-Kutta) oder mittels Simulation.

Bekanntestes Beispiel: Harmonischer Oszillator (Federschwinger)

$$m\ddot{x} = -kx$$

Weiteres Beispiel: Freier Fall mit Reibung

$$m\ddot{x} = -mg - r\dot{x}$$

Definition von Impuls $\vec{p} = m\dot{\vec{r}}$, Drehimpuls $\vec{L} = \vec{r} \times \vec{p}$, kinetischer $T = (m/2)(\dot{\vec{r}})^2$ und potentieller Energie $V(x) = -\int F(x)dx$.

Dynamik eindimensionaler Bewegung mit beliebiger ortabhängiger Kraft:

$$m\ddot{x} = F(x) \quad ; \quad x(t=0) = x_0 \text{ und } \dot{x}(t=0) = v_0$$

Allgemeine Lösung $t = t(x)$ mittels Energieerhaltungssatz $T + V = E$.

9. Schwingungen (49. KW, R. Mahnke)

Bekannt ist der harmonische Oszillator. Erweiterung durch Reibungskraft und äußere eingepreßte Kraft. Wirkt zusätzlich zur (harmonischen bzw. linearen) rücktreibenden Kraft eine geschwindigkeitsabhängige Dämpfung und eine zeitabhängige periodische aufgepreßte Kraft, so lautet die Schwingungsdifferentialgleichung

$$m\ddot{x} + r\dot{x} + kx = F_{ext} \sin(\Omega t) .$$

Diskussion von Spezialfällen. Falls die externe Kraft fehlt ($F_{ext} = 0$), so kann das homogene Problem (die freie Schwingung) relativ einfach mittels Transformation gelöst werden.

10. **Zentralkraftbewegung** (50. KW, R. Mahnke)

Aus der Newton-Gleichung folgen drei Bilanzgleichungen, und zwar für den Impuls, die Energie und den Drehimpuls. Erhaltungssätze erfordern spezielle Bedingungen.

Bei der Zentralkraftbewegung (die bekannte Gravitationskraft ist eine Zentralkraft) existieren Drehimpuls- und Energieerhaltung. Somit ist die Planetenbewegung exakt lösbar und führt auf die bekannten Kepler-Gesetze.

Die Diskussion der Bewegungstypen (offene und geschlossene Bahnkurven) erfolgt anhand des effektiven Potentials, das sich additiv aus dem Gravitationspotential (negativ, anziehend) und dem Drehimpulsanteil (positiv, abstoßend) zusammensetzt. Er gibt, in Abhängigkeit von der Gesamtenergie, Bindungszustände (Kreis- und Ellipsenbahnen) oder Streuzustände (Parabel- und Hyperbelbahnen).

13 Theoretische Mechanik: Lagrange'sche Formulierung

11. Lagrange-Formalismus (51. KW, R. Mahnke)

Massenpunkte mit eingeschränkter Bewegungsfreiheit (wie beim mathematischen Pendel) können entweder durch Zwangskräfte (Lagrange I) oder durch generalisierte Koordinaten q_i und generalisierte Geschwindigkeiten \dot{q}_i beschrieben werden. Dieser Lagrange-Formalismus verwendet eine Lagrange-Funktion $L = L(q_i, \dot{q}_i, t)$ als Differenz aus kinetischer T und potentieller Energie V .

Die Bewegungsgleichung für die Lagrange-Funktion $L = T - V$ folgt aus dem d'Alembertschen Prinzip (Extremalprinzip für die Wirkung $S = \int L dt$) und lautet

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} - \frac{\partial L}{\partial q_i} = 0.$$

Der generalisierte Impuls $p = \partial L / \partial \dot{q}_i$ ist eine Erhaltungsgröße, falls q_i eine zyklische Koordinate ist, d. h. L nicht von dieser Koordinate abhängt.

12. Kepler-Problem im Lagrange-Formalismus (2. KW, R. Mahnke)

Anwendung des Lagrange-Formalismus auf das (bekannte) Zentralkörperproblem; Beschreibung der Kepler-Bewegung in Kugelkoordinaten. Potentielle Energie (Gravitationspotential) ist radialsymmetrisch. Neben Erhaltung der Gesamtenergie gilt der Drehimpuserhaltungssatz $p_\varphi(t) = L_z$, da $\partial L / \partial \varphi = 0$, der auf eine ebene Bewegung führt. Somit Dynamik auf Ellipsenbahnen $r = r(\varphi)$ in einer $x - y$ -Ebene, die senkrecht zu L_z steht.

14 Theoretische Mechanik: Hamilton'sche Formulierung

13. Kepler-Problem im Hamilton-Formalismus (3. KW, R. Mahnke)

Alternative zum Lagrange-Formalismus. Die Hamilton-Funktion $H = H(q_i, p_i, t)$ 'lebt' im Phasenraum, der durch generalisierte Koordinaten q und generalisierte Impulse p aufgespannt wird. Die Dynamik des Systems wird durch die Hamiltonschen Bewegungsgleichungen (kanonische Gleichungen) beschrieben, ergibt die Phasenraumdynamik mit dem Fluss im Phasenraum. Beispiel: Phasenraumportrait des harmonischen Oszillators. Diskussion der Liouville-Gleichung. Nach Einführung der Poisson-Klammern erhalten die Bewegungsgleichungen eine Form, die später in der Quantenphysik Verwendung finden.

Ausgehend von der Lagrange-Funktion $L = T - V$ des Kepler-Problems

$$L(\dot{r}, \dot{\theta}, \dot{\alpha}, r, \theta, \alpha) = \frac{m}{2} \left(\dot{r}^2 + r^2 \left(\dot{\theta}^2 + \sin^2 \theta \dot{\alpha}^2 \right) \right) + \gamma \frac{Mm}{r}$$

wird die Hamilton-Funktion $H = T + V$ ermittelt. Sie lautet

$$H(p_r, p_\theta, p_\alpha, r, \theta, \alpha) = \frac{1}{2m} \left(p_r^2 + r^{-2} \left(p_\theta^2 + \sin^{-2} \theta p_\alpha^2 \right) \right) - \gamma \frac{Mm}{r}.$$

Verweis auf zyklische Koordinaten.

15 Einführung in die Straßenverkehrsphysik

14. Nichtlineare dynamische Systeme in Physik und Nicht-Physik (4. KW, R. Mahnke)

Wiederholung klassischer Newtonscher Mechanik. Newtonsche Bewegungsgleichung als dynamisches System inklusive Anfangsbedingungen. Die symmetrische Wechselwirkung 'Actio = Reactio' gilt nur bei passiven Teilchen. Die Dynamik für aktive, motorisierte, gepumpte Teilchen beinhaltet asymmetrische Wechselwirkungen. Ein typischer Ansatz, Hinweis auf Automobildynamik, lautet

$$\frac{dv_i}{dt} = f_i(v_i) + \sum_{j \neq i} f_{ij}(x_i, v_i | x_j, v_j)$$

mit Relaxationskraft als Vergleich zwischen Soll (Wunsch, Optimum) und Ist (Realität, Tatsache)

$$f_i(v_i) = \frac{1}{\tau_i} (v_i^{opt} - v_i) .$$

Die N -dimensionale Automobildynamik sei modelliert durch ein System von N Auto-Teilchen auf einem Kreis der Länge L , d. h. es gelte $x_i \in [0, L)$, $i = 1, \dots, N$ für ihre Orte. Die Bewegungsgleichungen seien dann gegeben durch

$$\begin{aligned} m \frac{dv_i}{dt} &= F_{\text{kons}}(\Delta x_i) + F_{\text{diss}}(v_i), \\ \frac{dx_i}{dt} &= v_i, \end{aligned}$$

wobei

$$\begin{aligned} F_{\text{kons}}(\Delta x_i) &= \frac{m}{\tau} (v_{\text{opt}}(\Delta x_i) - v_{\text{max}}) \leq 0 \\ &\text{mit } v_{\text{opt}}(\Delta x_i) = v_{\text{max}} \frac{(\Delta x_i)^2}{D^2 + (\Delta x_i)^2}, \\ F_{\text{diss}}(v_i) &= \frac{m}{\tau} (v_{\text{max}} - v_i) \geq 0 \end{aligned}$$

und die Abstände Δx_i zwischen den Autos zyklisch gegeben sind durch $\forall i = 1, \dots, N-1 : \Delta x_i = x_{i+1} - x_i$ und $\Delta x_N = x_1 - x_N$.

16 Hinweis auf stochastische Dynamik

15. Zufallswanderer und Drift-Diffusion (5. KW, R. Mahnke)

Die deterministische Bewegung wird durch Schwankungen (Fluktuationen) gestört. Überwiegen die zufälligen Ereignisse wird die Bewegung stochastisch (Physik stochastischer Prozesse) genannt. Diffusion ist ein einfacher zufälliger Prozess.